O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

QARSHI MUHANDISLIK - IQTISODIYOT INSTITUTI

OLIY MATEMATIKA

(ma'ruza matnlari to'plami)

Qarshi - 2006 yil

Qarshi - 2006 yil

у ׳

O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TALIM VAZIRLIGI

QARSHI MUHANDISLIK IQTISODIYOT INSTITU П

«FIZIKA VA OLIY MATEMAT1KA» KAFEDRASI

E.Xolmurodov, A.Yusupov

OLIY MATEMATIKADAN MA‘RUZALAR
I-QISM

Bakaiavr yo’nalishidagi 5540300-Neft va gaz ishi talabalari uchun ma‘ruza!ar matni

QARSHI-2006

Taqrizchilar:

Qarshi Davlat Universiteti
«Matematik analiz»kafedrasi mudiri,
dotsent E.Eshdavlatov.
Qarshi Muxandislik Iqtisodiyot Instituti
«Informatika va axborot texnologiyalari»
kafedrasi mudiri, dotsent Z.Uzoqov

Ma‘ruzalar matni to’plami «Fizika va oliy matematika» kafedrasi (№8, 13.12.2004yil) yig’ilishida, Muxandis texnika fakulteti uslubiy komissiyasi (№4, 25.12.2004yil) yig’ilishida, QM1I uslubiy kengashi (№1,06.09.2005yil) da ko’rib chiqilgan va o’quv jarayonida foydalanishga tavsiya etilgan.

Annotatsiya

Ushbu ma'ruzalar matnlari to’plami Oliy texnika o’quv yurtlari (neft va gaz ishi yo’nalishi) bakalavriati talabalariga mo’ljallab yozilgan.

U Oliy matematika kursining chiziqli algebra va analitik geometriya hamda bir o’zgaruvchili funktsiyaning differensial hisobi kabi qismlarni o’z ichiga oladi.

Taqdim etilayotgan material ramziy tarzda 27 ta ma‘ruzalarga ajratilib har bir ma‘ruzaning oxirida mavzuni chuqurroq o’zlashtirish maqsadida o’z-o’zini tekshirish savollari hamda mustaqil bajarish uchun mashqlar berilgan.

Аннотация

Данный сборник текстов лекций предназначен для студентов бакалавриата (направления нефтегазовое дело) высших технических учебных заведений. Он охватывает такие разделы курса высшей математики, как линейная алгебра и аналитическая геометрия, а также дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Представляемый материал символически подразделён на 27 лекций и в целях более глубокого освоения гемы в конце каждой лекции даны вопросы для самоконтроля, а также упражнения для самостоятельного выполнения.

Annotation

This collection of lecture texts is predestinated for bachelor students (of oil and gas affair direction) of high technical education institutions, it takes hold of such partitions of high mathematics course as linear algebra and analytical geometry as well as the differential calculation of functions for one variable. The offering material is divided into 27 lectures symbolically and in order to more deep appropriate of a theme at the end of every lecture there arc given the questions for sell-control as well as exercises for independent performance.

Kirish

Mamlakatimiz mustaqillikka erishilgandan so’ng dastlabki yillardanoq ta‘lim sohasiga alohida e'tibor qaratib kelinmoqla. «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi» talablaridan kelib chiqilib, ta‘lim tizimi tubdan isloh qilinmoqda. Ma‘lumki, uzluksiz ta‘lim tizimida oliy ta‘lim ikki, ya‘ni bakalavr va magistralra bosqichlaridan iboratdir.

Shu sababli barcha bakalavr ta‘lim yo’nalishlari va magistratura mutaxassisliklari bo’yicha ta‘lim standartlari, namunaviy o’quv rejalar, fanlar bo’yicha namunaviy dasturlar ishlab chiqildi va tasdiqlandi.

Bakalavr ta'lim yo’nalishlari uchun yangi davlat ta‘lim standartlari talablari asosida o’quv adabiyotlarining yangi avlodini yaratish, dolzarb vazifalardan biridir.

Ushbu ma‘ruzalar matnlari to’plami ham Oliy ta‘limning yangi davlat ta‘lim standartlari asosida «Nett va gaz ishi» bakalavr ta‘lim yo’nalishiga mo’ljallanib, «Oliy matematika» fanining namunaviy dasturi bo’yicha tayyorlangan.

«Oliy matematika» fani «Neft va gaz ishi» bakalavr ta‘lim yo’nalishida to’rt semestr o’qitilishi rejalashtirilgan. Ushbu ma‘ruzalar matnlari to’plami 1 kurs talabalariga birinchi semestrda «Oliy matematika» fanidan o’tilishi mo’ljallangan material™ o’z ichiga oladi.

Ushbu to’plamga «Oliy matematika» fanining «Chiziqli algebra va analitik geometriya» hamda bir o’zgaruvchili funktsiyalar nazariyasining differentsial hisobi kabi bo’limlari kiritiigan.

Ma‘ruza matnlaridan foydalanishda mavzuni o’zlashtirilgandan so’ng, o’z- o’zini tekshirish savollariga javob qaytarish hamda mashqlarni bajarish lozim.

Ma^{L}ruza matnlari to’plamidan turdosh ta‘lim yo’nalishlari talabalari ham foydalanishlari mumkin.

«Neft va gaz ishi» yo’nalishi 1 kurs talabalariga «Oliy matematika» fanidan
I- semestrda 54 soatlik ma‘ruza o’tilishi ko’zda tutilgan. To’plamda o’quv dasturida ko’rsatilgan materiallar ramziy tarzda 27 ta ma‘ruzaga ajratilgan bo’lib. u yerdagi ba‘zi mavzular mustaqil tadimga mo’ljallangan.

Har bir ma‘ruzada foydalanishi lozim bo’lgan adabiyotlar ro’yxati keltirilgan. Mavzu haqidagi to’liq ma‘lumotni ko’rsatilgan adabiyotlardan topish mumkin.

Shuningdek, har bir ma‘ruzada uchraydigan tayanch iboralar keltirilgan. Tayanch iboralarning lug’aviy ma‘nolari asosan matnning o’zida keltirilganligi sababli, ularning lug’ati tuzilmagan.

Maruzalarning taqsimlanishi.

i №	**Ma'ruza mavzulari**	**Soat**
1	Haqiqiy sonlar. Koordinatalar usuli.	2
2	Determinantlar va ularning xossalari.	2
3	Chiziqli tenglamalar sistemasini determinantlar yordamida yechish. Kramer qoidasi.	2
4	Matritsalar va ular ustida amallar.	2
5	•Chiziqli tenglamalar sistemasini echishning matritsa va Gauss usullari.	2
6	Vektorlar va ular ustida amallar.	2
7	Vektorning yo'nalishi. Skalyar ko'paytma.	2
8	Vektorlarning vektor va aralash ko'paytmasi.	2
9	Tckislikdagi to'g'ri chiziq tenglamalari.	2
10	To'g'ri chiziq tenglamalari.	2
11	Ikkinchi tartibli egri chiziqlar.	2
12	Tekislik tenglamalari.	2
13	Fazodagi to'g'ri chiziq. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi munosabat.	2
14	Ikkinchi tartibli sirtlar.	2
15	Bir o'zgaruvchining funksiyasi.	2
16	O'zgaruvchi miqdorning limiti.	2
17	Limitlar haqida asosiy teoremalar. Ajoyib limitlar. Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash.	2
18	Funksiyaning uzluksizligi.	2
19	Funksiyaning hosilasi, uning geometrik va mexanik ma'nolari.	2
20	Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari	2
21	Ba'zi elementar funksiyalarning hosilalari. Hosilalar jadvali.	2
22	Funksiyaning differensiali. Yuqori tartibli hosilalar va differensiallar. Urinma va normal tenglamalari.	2
23	Differensiallanuvchi funksiyalar haqida ba'zi teoremalar.	2
24	Aniqmaslikiarni ochish. Lopital qoidasi.	l2~
25	Teylor va Makloren formulalari.	2
26	Funksiyaning o'sishi va kamayishi. Funksiyaning maksimum va minimumi.	2
27	Funktsiyaning grafigini chizish. Jami:	2 54

<u>1-ma‘ruza.</u> Mavzu: Haqiqiy sonlar. Koordinatalar usuli.

Reja:

]. Haqiqiy sonlar.
2. Haqiqiy sonlarning geometrik tasviri. To'g'ri chiziq nuqtalarining koordinatalari.
3. Haqiqiy sonning absolyut(mutloq) qiymati.
4. To'g'ri chiziqning ikki nuqtasi orasidagi masofa.
5. Dekartning tekislikdagi koordinatalar sistemasi.
6. 'Tekislikning ikki nuqtasi orasidagi masofa.
7. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.
8. Fazodagi nuqtaning koordinatalari. Koordinatalar usuli.
9. Ikki o'q orasidagi burchak.
10. Qutb koordinatalar sistemasi.
11. Dekart va qutb koordinatalari orasidagi bog'lanish.
12. Koordinatalarni almashtirish.

Adabiyotlar: 3,5,7,10,11,15,16.

Tayanch iboralar: natural son, butun son, ratsional son, irratsional son, haqiqiy son, son o'qi, masshtab, sonning absolyut qiymati, Dekart sistemasi, nuqtaning koordinatalari, koordinata sistemasi, abssissa, ordinata, applikata, oktant, qutb koordinatalari, koordinatalarni almashtirish.

1.1. Haqiqiy sonlar

Narsalarni, buyumlarni sanash zaruryati tulayli **natural** sonlar to'plami N={ 1,2,3...} paydo bo'ladi. Bu to'plamga natural sonlarga qarama-qarshi sonlarni hamda nolni qo'shish (birlashtirish) natijasida butun sonlar to'plami Z={...,-n,...,-3,-2,-l,0,l,2,...,n,...} yuzaga keldi. Keyinchalik ikkita butun sonlarning nisbati ko'rinishida tasvirlanadigan **ratsional** sonlar to'plami *Q={p/q}* (bunda *p,q&L,q* *0) kiritildi. Har qanday *p* butun sonni y ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lganligi uchun butun sonlar ham ratsional sonni tashkil etadi. Istalgan sonni ikkita butun sonlarning nisbati ko'rinishda tasvirlash mumkinmi, degan savolga yo'q degan javob olindi. Masalan, tomonlari bir birlikka teng kvadratning diagonali uzunligi (d=V2), shuningdek aylana uzunligining uning diametriga nisbati (л) kabi sonlarni ikkita butun sonlarning nisbati ko'rinishida tasvirlab bo'lmasligi isbotlandi.

Ratsional bo'lmagan sonlar **irratsional** sonlar deyiladi.

Har qanday ratsional son chekli voki cheksiz davriy o'nli kasr shaklida tasvirlanishini irratsional son esa cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasr shaklida tasvirlanishni eslatib o'tamiz. Masalan, — =0,25 chekli o'nli kasr, —=0,777...-0,(7) 4
9
cheksiz davriy kasr, 72 = 1,414..., л=3,14159..., e=2,7182818284... cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasrlardir.

Ratsional va irratsional sonlar to'plamlarining birlashmasi **haqiqiy** sonlar to'plamini tashkil etadi va u R orqali belgilanadi.

1.2. Haqiqiy sonlarning geometrik tasviri. To'g'ri chiziq nuqtalarining koordinatalari

Sonlar o'qi yoki o'q deb sanoq boshi-koordinatalar boshi, musbat yo'nalish hamda uzunligi bir birlikkateng sanaluvchi kesma-o'lchov birligi tanlangan to'g'ri chiziqqa aytiladi.'

Yo'nalish chizmada strelka orqali belgilanadi. Agarda sonlar o'qi l-chizmada ko'rsatilganidek tanlansa, musbat *x* haqiqiy songa sonlar o'qining sanoq boshi

O л:

1__ __

1- chizma.

0 dan o'ngdagi undan x masofada bo'lgan nuqtasi, manfiy x songa 0 sanoq boshidan chapdagi undan -x masofada bo'lgan nuqtasi mos keladi; 0 songa sonlar o'qining sanoq boshi mos keladi. x haqiqiy son sonlar o'qida uni tasvirlovchi Л/ nuqtaning **koordinatasi** deb aytiladi va A/(x) ko'rinishda yoziladi.

M, _ o M_3 M ________________________

-5 .2.5 Ts *n* *■ *л*.

2- chizma.

2-chizmada -5, -2.5, 1.5, я haqiqiy sonlarni sonlar o'qida mos ravishda tasvirlovchi A/i(-5), $Л7_2$(-2.5), $A7_3$(1.5) va $Л7_7$(я) nuqtalar ko'rsatilgan.

Shunday qilib, istalgan x haqiqiy songa sonlar o'qining aniq bitta M nuqtasi va aksincha sonlar o'qining istalgan M nuqtasiga bitta haqiqiy son shu nuqtaning koordinatasi x mos kelar ekan. Boshqacha aytganda haqiqiy sonlar to'plami bilan sonlar o'qining nuqtalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud ekan.

Haqiqiy sonlar to'plamining muhim xossalaridan biri uning tartiblanganligi, ya'ni istalgan ikkita o'zaro teng bo'lmagan x i va x_2 haqiqiy sonlar uchun x i>x_2 va X]<x_2 munosabatlardan faqatgina biri bajariladi.xolos.

Agar sonlar o'qi l-chizmada ko'rsatilganidek ya'ni gorizontal joylashtirilgan bo'lib yo'nalish chapdan o'ngga tayinlangan bo'lsa, katta haqiqiy sonni tasvirlovchi nuqta kichik haqiqiy sonni tasvirlovchi nuqtadan o'ngda yotadi.

1.3. Haqiqiy sonning absolyut (mutloq) qiymati

x >0 haqiqiy sonning absolyut qiymati (moduli) deb shu sonning o'ziga, x<0 sonning absolyut qiymati deb -x songa aytiladi. x haqiqiy sonning absolyut qiymati | x | kabi yoziladi.

Shunday qilib:

.. fx, *agar x* > 0 *bo'lsa,*

x = <

I - x, *agar x* < 0 *bo'lsa.*

Masalan, | 8 1 =8, | 5 I =5, ' -5 | ~5.

Noldan farqli istalgan haqiqiy sonning moduli musbat bo'lar ekan.

Istalgan E>0 uchun | x | <e va -s<x<s tengsizliklar teng kuchliligini eslatib o'tamiz.

Haqiqiy sonning absolyut qiymati quyidagi xossalarga ega:

1 . | X | + X_2| < | X! | + | X_2 | .

2. I X,- X_2!>| X| I-1 x_2| .

3. $x_1 \cdot x_2$’" ^{x} n I ‾ I ^{X} I 1 ’ I ^{X}2 I •" I ^{X}п ! ■
$X_{\pm}$ _ 1*ll
4. X, $|x_2|$'

Izoh. Kelgusida faqatgina haqiqiy sonlar bilan ish ko’rganimiz uchun haqiqiy son o’rniga oddiy son iborasini ishlatamiz.

1.4. To’g’ri chiziqning ikki nuqtasi orasidagi rnasofa

Sonlar o’qining M_t(X|) va $M_2(x_2)$ nuqtalari orasidagi rnasofa *d* ni topish uchun formula chiqaramiz.

Faraz qilaylik 0 <x_J < x, bo’lsin (3^a -chizma)

J)Mi (x_t) M_2(x,)

x 3^a -chizma.

U holda OM|~X|, $OM_2=x_2$ bo’lib, t^OMo-OM^xi-xi bo’ladi. Shuningdek x_2<Xi bo’lganda (3^b-chizma) *d~~x_J-x_2* bo’ladi.

Shunday qilib har ikkala hoi uchun ham rf=lx_2-xj (1-1) formulaga ega bo’lamiz.

O M, (jg)

3^b -chizma.

To’g’ri chiziqning ikkita nuqtalari orasidagi masofani topish uchun chiqarilgan (1.1) formula istalgan x_b x_2 lar uchun ham o’rinli ekanligiga ishonch hosil qilish qiy in emas.

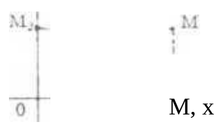
1-misol. M|(5) va M_2(-4) nuqtalar orasidagi rnasofa topilsin.

Yechish. X)=5,x_2=-4. (1.1) formulaga binoan d=|-4-5|=|-9|=9 bo’ladi.

1.5. Dekartning tekislikdagi koordinatalar sistemasi

Yuqorida ko’rdikki, to’g’ri chiziq nuqtalarining o’rni bitta son yani uning koordinatasi bilan to’la aniqlanadi. Tekislik nuqtalarining o’rni bir juft sonlar bilan aniqlanishini ko’rsatamiz. Faraz qilaylik tekislikda 0 nuqtada kesishuvchi, bir xil o’lchov birligiga ega va o’zaro perpendikulyar Ox, *Oy* o’qlar berilgan bo’lsin (ular tekislikda dekart sistemasini tashkil etadi). Ox va Oy o’qlar joylashgan tekislik koordinatalar tekisligi deb aytiladi va Oxy kabi belgilanadi(4-chizma).

N4 nuqtadan Ox va Oy o’qiariga perpendikulyar o’tkazib, ularning asoslarini Mj va M_2 lar orqali belgilaymiz. M(nuqtaning Ox o’qdagi koordinatasi x N4 nuqtaning **abssissasi,** M_2 nuqtaning Oy o’qdagi koordinatasi y N4 nuqtaning **ordinatasi** deb aytiladi. x, y lar M nuqtaning koordinatalari (dekart koordinatalari) deb aytiladi.



4-chizma.

Shunday qilib, Oxy koordinata tekisligining istalgan N4 nuqtasiga yagona tartiblangan sonlar jufti (x,y)--uning koordinatalari mos keladi.

M nuqta shu Oxy tekislikning ixtiyoriy nuqtasi *У к* bo’lsin.

i

Aksincha, har qanday (x,y) juftlik *Oxy* tekislikdagi yagona M nuqtani aniqlaydi. Demak, tartiblangan *(x,y)* sonlar jufti bilan *Oxy* koordinata tekisligining nuqtalari orasida o’zaro bir qiymatli moslik mavjud ekan.

Ox o’q abssissalar o’qi, Oj-' o’q esa ordinatalar o’qi, ular birgalikda **koordinata o’qlari** deyiladi. O’qlarning kesishish nuqtasi 0 **koordinatalar** boshi deyiladi. Koordinata o’qlari koordinata tekisligini **choraklar** deb ataluvchi to’rtta

y

П chorak	I chorak
x<0 ; yXI	r. 0; *У* 0
0	
Ш chorak	IV chorak
x<0 ; У<0	x>0 ; ,y<o

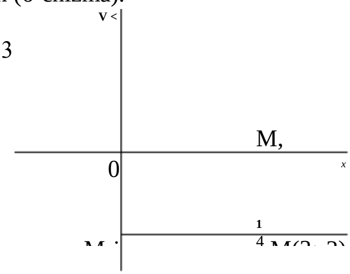
5-chizma.

qismlarga ajratadi (5-chizma). *x* abssissaga va y ordinataga ega bo’lgan M nuqtani M(x;y) ko’rinishda yozish qabul qilingan.

2-misol. Tekislikda M (3; -2) nuqta yasalsin (6-chizma).

Yechish. Abssissalar o’qi Ox da koordinatasi 3 ga teng M; nuqtani hamda ordinatalar o’qi Oy da koordinatasi -2 ga teng bo’lgan M_2 nuqtalarni olamiz. M_t nuqtadan Ox o’qqa perpendikulyar, M_2 nuqtadan Oy o’qqa perpendikulyar to’g’ri chiziqlar o’tkazamiz.

To’g’ri chiziqlarning kesishish nuqtasi M izlanayotgan nuqta bo’ladi.



6-chizma.

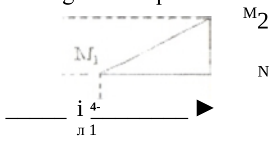
3- **misol.** Berilgan M nuqtaga ko’ra uning koordinatalari topilsin.

Yechish. M nuqtadan Ox va Oy o’qlarga perpendikulyarlar o’tkazib, ularning asoslarini mos ravishda M_t va M_2 lar orqali -belgilaymiz. M_t nuqtaning Ox dagi koordinatasi x M nuqtaning abssissasi, M_2 nuqtaning Oy o’qdagi koordinatasi M nuqtaning ordinatasi bo’ladi.

1.6. Tekislikning ikki nuqtasi orasidagi masofa

Oxy tekisligining berilgan M|(xi;y>) va $M_2(x_2;y_2)$ nuqtalari orasidagi masofani topish uchun formula chiqaramiz. M-.M? kesma koordinata o’qlarining hech biriga parallel bo’lmasin(7-chizma).

M_t nuqtadan Ox ga parallel, M_2 nuqtadan Oy ga parallel to’g’ri chiziqlar o’tkazib ularni kesishish *Ym*- nuqtasini N orqali belgilaymiz. M,M_2N uchburchak to’g’riburchakli bo’lganligi sababli Pifagor teoremasiga binoan $M|M_2^2$—M_IN^2+NM7 bo’ladi. M|N=[x_2-.V| 1, NM_2“ly_2-y_t ' ekanini hisobga olsak,



7-chizma.

$$M|M_2^2=ix_2\text{-xi } 1^2+1\text{yr-T}11^2\sim(.^X2\sim X\backslash')^2+(У2\text{-}У\backslash)^2 \text{ bo’ladi.}$$

Izlanayotgan masofani d orqali belgilasak, tekislikdagi ikki nuqta orasidagi masofani topish uchun $d=J(x,-x,)^2+(y,-y_t)^2$ (1.2) formulaga ega bo’lamiz.

Xususiy holda koordinatalar boshidan M(x;y) nuqtagacha d masofa $d\text{-}yjx^2+y^2$ (1.3) formula yordamida topiladi.

(1 2) formula M_tM_2 kesma koordinata o'qlarining birortasiga parallel bo’lganda ham o’z kuchini saqlaydi.

4- **misol.** Mi (3; 4) va M_2(-i; 1) nuqtalar orasidagi rnasofa topilsin.

Yechish. X|=3, yj=4, x_2=-l, y_2=l. (1.2) formulaga binoan d=7Tb3)’ +(l-4)^T = #^{4}Г + (-3)^2 = V16 + 9 = 5 bo’ladi.

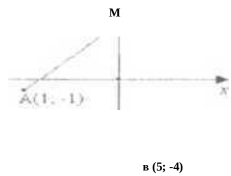
5- **misol.** Oxy tekislikning A(l;-1) nuqtadan hamda *Oy* o'qdan 5 birlik uzoqlikda joylashgan nuqta topilsin(8-chizma).

Yechish. M(x,y) (x>0) izlanayotgan nuqta bo’lsin. U holda M_2(0,y) M nuqtaning Oy o’qidagi proeksiyasi bo’ladi.

Shartga ko’ra M_2M—AM$^=$5. (1.2) formulaga asosan M_2M^V(x-0)$^:$ +(y-y)^2 $^=$5 yoki bundan *x=5* kelib chiqadi. M»‘

Shuningdek AM=T(x-I)^2 + (y + I)^2 = 5 У°к' bunga x—5 ni qo’ysak *yj(5 -+ (y +* *5-,*

4^2+(y+l)^2=25; (y+l)^2=9; y+l=±3; yi=2, y_2=-4 ga ega bo’lamiz. Demak masalaning shartini ikkita M(5;2) va B(5;-4) nuqtalar qanoantlantirar ekan.



8-chizma.

6- **misol.** Koordinatalar boshidan M(6; 8) nuqtagacha rnasofa topilsin.

Yechish. x-6, (1.3) formulaga ko’ra *d* = 7б^2 +8$^:$ = V36 + 64 = V100 = 10 bo’ladi.

1.7. Kesmani berilgan nisbatda bo’lish

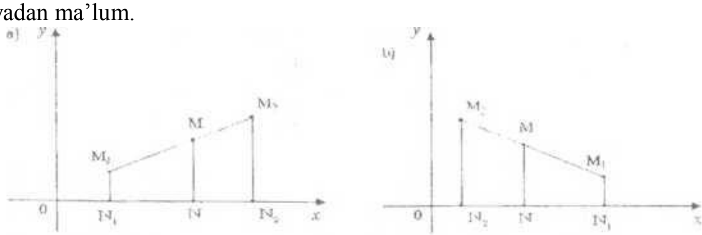
M|M_2 kesmani berilgan Л>0 nisbatda bo’lish deganda shu kesmada —munosabatni qanoatlantiruvchi M nuqtani topish tushuniladi.

MM,

Oxy tekislikda M|(X|, yi), M_2(x_2, y_2) nuqtalar berilganda M,M_2 kesmani л>0 nisbatda bo’luvchi M(x;y) nuqtaning koordinatalarini topish uchun formula chiqaramiz. M|, M va M_2 nuqtalarning Ox o’qlardagi proeksiyaiarini N_bN va N_2 lar orqali belgilaymiz (9-chizma).

U holda ular Ox o’qda W,(x,), /v(x), W,(x,) koordinatalarga ega bo’ladilar.

Parallel to’gri chiziqlar orasidagi kesmalar proporsional bo’lishi elementar geometriyadan ma’lum.



9-chizma.

Shunga binoan, - ^-= ‘*k.* Ammo N|N=Ix-xj , NN_2=lx->-x| bo’lgani
MM, NN,

|x ■“ л* j
uchun j ---—j = Я . x-X] va x_2-x ayirma bir xil ishoraii ekanligini hisobga olib *x*-

X|| va |x-<-x| modullarni x-Xi va x->-x ayirmalarga almashtirib -——= Я tenglikka Л' 2 —
Л*
ega bo’lamiz. Oxirgi tenglikni yechib x ni aniqlaymiz: x-x,-Лx_2-Xx; x-Ax-X|4Ax_2; (1 +X)x-X| +Axэ; x= + ^л,2 .

1 + Я

Shunga o’xshash formulani y uchun ham hosil qilish mumkin.

Shunday qilib izlanayotgan M nuqtani x *vay* koordinatalarini topish uchun

(1.4)

1 + Я 1 + Я

formulalarni hosil qilamiz.

Xususiy holda M,.M_2 kesmaning o’rtasini koordinatalarini topish taiab etilganda X-l bo’lib (1.4) dan

x = *У* = (1-5)

formulalarga ega bo’lamiz.

7- **misol.** Agar M](3; -2), M_2(l; 4) bo’lsa M_tM_2 kesmani bo’luvchi $\lambda = \frac{1}{4}$ nisbatda nuqtaning koordinatalari topilsin.

7 1 !
3 + • 1 |
Yechish. .v, = 3, *y,* = -*2,* x_2 = 1, y, = 4 (1.4) ga ko’ra x = ------------- 4—= — = 2,6,
1 +
4

-2+ ' -4
v = ------ --— = — = -0,8 bo’ladi.
' 1+’ 5
4

Demak izlanayotgan nuqta M(2,6; -0,8) bo’ladi.

8- **misol.** Agar M|(4; 5), M_2(-2; 3) bo’lsa M,M_2 kesmaning o’rtasi topilsin. **Yechish.** x, =4, = 5, x, =-2, y_2 = 3. (1.5) formulaga binoan

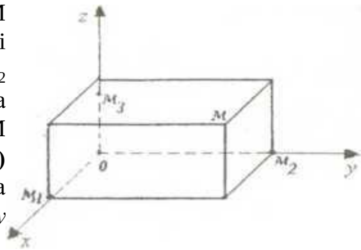
x = ------ =1, *y*----- = 4 bo ladi.
2 2

Demak M(l,4) nuqta berilgan M|M_2 kesmaning o’rtasidir.

1.8. Fazodagi nuqtaning koordinatalari. Koordinatalar usuli

Fazodagi nuqtaning holati uchta son yordamida aniqlanishini ko’rsatamiz. Fazoda bir xil o’lchov (masshtab) birligiga ega 0 nuqtada kesishuvchi o’zaro perpendikulyar uchta Ox, *Oy,* Or o’qlarni olamiz. Bu o’qlarni **koordinata o’qlari** deb atab ularni kesishish nuqtasini **koordinatalar boshi** deb ataymiz. Bu o’qlar joylashgan fazoni Oxyz orqali belgilaymiz.

Koordinata o’qlari Ox, *Oy, Oz* fazoda Dekartning to’g’ri burchakli koordinatalar sistemasini tashkil etadi. M Oxyz fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo’lsin. Undan koordinata o’qlariga perpendikulyar uchta tekislik o’tkazamiz. Tekisliklarning *Ox, Oy* va *Oz* o’qlar bilan kesishish nuqtalari M|,M_2 va M_3 lar M nuqtaning mos o’qlardagi **proeksiyalari** deyiladi (10-chizma). M, nuqta *Ox* o’qda x koordinataga, M_2 nuqta Oy o’qda *y* koordinataga va M_3 nuqta *Oz* o’qda *z* koordinataga ega bo’lsin. x, *y* va *z* sonlar M nuqtaning fazodagi **to’g’ri burchakli (yoki dekart) koordinatalari** deyiladi va M(x,y,z) ko’rinishda yoziladi. Bunda x M nuqtaning **abssissasi,** *y* **ordinatasi,** *z* esa **applikatasi** deyiladi.



10-chizma.

Shunday qilib fazoning ixtiyoriy nuqtasi yagona tartiblangan sonlar uchligi shu nuqtaning koordinatalari x, y va *z* larni aniqlaydi.

Aksincha *Oxyz* fazodagi M nuqtaning holati uning uchta dekart koordinatalari yordamida to’liq aniqlanadi. Shunday qilib tartiblangan sonlar uchligi *(x,y,z)* bilan *Oxyz* fazoning nuqtalari orasida o’zaro bir qiymatli moslik mavjud ekan.

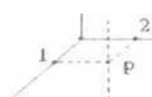
Agar har ikkita koordinata o’qlari orqali tekisliklar o’tkazsak o’zaro perpendikulyar bo’lgan **koordinata tekisliklari** deb ataluvchi uchta Oxy, *Oyz,* va *Oxz* tekisliklar hosil bo’ladi. Bu tekisliklar butun *Oxyz* fazoni **oktantlar** deb ataluvchi 8 ta qismga ajratadi.

Shunday qilib sonlar o’qining nuqtasi bitta haqiqiy son x yordamida, tekislik nuqtasining tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan o’rni ikkita tartiblangan sonlar juftligi (x,_y) yordamida, fazo nuqtasining tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan holati uchta tartiblangan sonlar uchligi (x,j-,s) yordamida to’liq aniqlanar ekan. Nuqtaning holatini sonlar yordamida aniqlash usuli **koordinatalar usuli** deb ataladi.

Bu usulning asoschisi fransuz matematigi va filosofi Rene Dekartdir (1596- 1650). U geometrik masalalarni algebra usullaridan foydalanib yechishni taklif etish bilan birga Oliy matematikaning rnaxsus bo’limi, **analitik geometriyani** yuzaga kelishiga sababchi bo’ldi.

9- misol M(I ;2:-4) nuqta yasalsin.

Yechish. Ox o’qda koordinatasi 1 ga teng nuqtani olib undan Ov o’qqa parallel to’g’ri chiziq o’tkazamiz. Shuningdek 0j-' o’qda koordinatasi 2 ga teng nuqtani olib undan Ox ga parallel to’g’ri chiziq o’tkazamiz. To’g’ri chiziqlarning kesishish nuqtasini P orqali belgilaymiz. P orqali *Oz* o’qqa paralei to’g’ri chiziq o’tkazib undan pastga tomon 4 birlikka teng kesma ajrdtamiz. Ana shu kesmaning oxiri M(l; 2; -4) nuqtani aniqlaydi(11-chizma).



tM(l;2;-4)

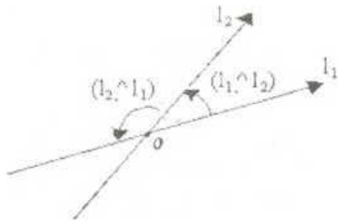
1 I-chizma.

Ii bilan l_2 o’qlar orasidagi burchak deganda I, o’qni 1_2 bilan ustma-ust tushishi uchun fi

1.9. Ikki o’q orasidagi burchak

0 nuqtada kesishuvchi 1| va l_2 o’qlarni qaraymiz.

ni 0 nuqta atrofida soat milini yo’nalishiga teskari yo’nalishda burilishi lozim bo’lgan burchakni tushuniladi. I, bilan 1_2orasidagi burchakni (I^B) kabi yoziladi. Ta‘rifga ko’ra ($1_Ь$ ^Л^ 1_2)^(Ь/А)- 0<Оь^А^1г)<л desak ikki o’q orasidagi burchak bir qiymatli aniqlanadi (12-chizma).



12-chizma.

1.10. Qutb koordinatalar sistemasi

Tekislikda dekartning to’g’ri burchakli koordinatalar sistemasidan keyin ko’p qo’llaniladigan koordinatalar sistemalaridan biri **qutb koordinatalar sistemasi** bilan tanishamiz.

Tekislikning 0 nuqtasini va undan chiquvchi 1 nurni qaraymiz(13-chizma). Bu nurni **qutb o’qi** uning boshi 0 nuqtani **qutb** deb ataymiz. M nuqta tekislikning qutbdan

r

farqli ixtiyoriy nuqtasi bo’lsin. OM=/>0 x'

masofani **qutb radiusi,** ZMOl-^ burchakni *y* 1

qutb burchagi deb ataymiz, hamda 0<(p<2тг ~ ~ *

deb faraz qilamiz. *r* va <*p* lar M nuqtaning **qutb** 13-chizma.

koordinatalari deb ataladi va M($?; r) kabi yoziladi, qutb uchun /-0.

10-misol. M;(rr/4;3), M_2(я;2), M_3(0;4) va M_4(3л/2;5) nuqtalar yasalsin.

11

Yechish. Birinchi nuqtani yasash uchun qutbdan chiqib, qutb o’qi bilan тv/4 burchak tashkil etuvehi l| nurni o’tkazib, undagi koordinatasi 3 ga teng N4] nuqta olinadi. Qolgan nuqtalar ham shunga o’xshash yasaladi(14-chizma).

*\ 4

1_5 Z . 4 A

M_3(0;4)

2

1

14-ehiznia

1.11. Dekart va qutb koordinatalari orasidagi bog’lanish

Ba‘zan dekart va qutb koordinatalaridan bir vaqtning o’zida foydalanishga to’g’ri keladi. N4 nuqtaning .v. v dekart koordinatalari bilan uning </?, r qutb koordinatalari orasida bog’lanish o’rnatamiz. Bu masalani hal etish qutb o’qi hamda dekart sistemasi o’qlarining joylashishiga bog’liq. Biz qutb o’qi dekart sistemasining abssissalar o’qi bilan qutb, dekart sistemasining koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushgan hususiy hoi bilan cheklanamiz. Qutb o’qi va Ox , Oy o’qlar bir xil o’lchov (masshtab) birligiga ega deb faraz qilamiz.

cos<*p* va sin$» funksiyalarinng ta‘rifiga binoan (15-chizma)

•v=rcos4(i.6)
v = r sin j

cos <*p* - *x/r*, sin <*p* = y/r va bundan formulaga ega bo'lamiz. Bu formulalardan foydalanib, nuqtaning qutb koordinatalari *(p, r* lar ma'lum bo'lganda uning л, *y* dekart koordinatalarini topish mumkin. Nuqtaning qutb koordinatalarini uning dekart koordinatalari orqali ifodalash uchun (1.6) dagi har ikkala tenglikni kvadratga ko'tarib qo'shamiz. U holda x^2+y^2^*r~(cos*^{2}*^-sin~<p)* yoki $x^2+y^2=f^2$

bo'ladi.

15-chizma

$$r=\sqrt{x^2+y^2}. \quad (1.7)$$

(1.6) dagi ikkinchi tenglikni birinchisiga hadlab bo'lsak,

(1.8)

Bundan

y sin^ . . yoki *tg(p~* *y* / x
X COS 69

hosil bo'ladi. (1.7) va (1.8) lardan foydalanib, nuqtaning dekart koordinatalariga ko'ra uning qutb koordinatalarini aniqlash mumkin. Odatda (1.8) tenglik (inning ikkita (0<<p<2л) qiymatlarida o'rinli bo'ladi. Ulardan *(p* ning (1.6) ni qanoatlantiradiganini olish lozim.

Izoh. *(p* ning topilgan ikkita qiymatlaridan keraklisini nuqta dekart sistemasining qaysi choragida yotishiga qarab olish ham mumkin.

(1.8) formulaga binoan _L = V3 / 7з 3

Ushbu tenglik ning ikkita qiymatlarda qiymatlarida, ya'ni ^9|=— / 6 va $\varphi_2=\frac{7\pi}{6}$

bajariladi. M(73;1) nuqta dekart sistemasining birinchi choragiga

11- misol. M nuqtaning dekart koordinatalari x=V3,y=l ga ko'ra uning qutb koordinatalari topilsin.

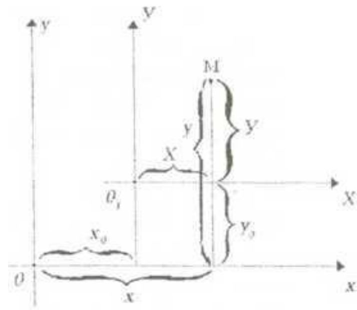
Yechish. (1.7) formulasiga asosan /-^(л/3)^2 +T^2 =л/з + 1=2.
tegishli bo'lganligi sababli *(p*= — bo'ladi. Shunday qilib, M nuqta 40=-, r=2 qutb 6 6 koordinatalariga ega bo'lar ekan.

1.12. Koordinatalarni almashtirish

Koordinatalarni almashtirishning ikkita usuli bilan alohida alohida tanishamiz.

1.Koordinata o'qlarini parallel ko'chirish. Bir vaqtda ikkita dekart koordinatalar sistemalari Oxy va 0|XУ ni qaraymiz. OjXY sistema Oxy sistemani koordinata o'qlarini yo'nalishini o'zgartirmasdan koordinatalar boshini 0| nuqtaga ko'chirish natijasida hosil bo'lsin(16-chizma).

Nuqtaning Oxy sistemaga nisbatan koordinatalarini **“eski”** koordinatalar, 0|АУ sistemaga nisbatan koordinatalarini **“yangi”** koordinatalar deb ataymiz. Faraz qilayiik, 0| nuqta “eski” Oxy sistemaga nisbatan x_0, yo koordinatalarga ega bo’lsin. Tekislikning istalgan M nuqtasini x, y “eski” koordinatalari bilan *X, У* “yangi” koordinatalari orasida bog’lanish o’rnatamiz. 16-chizmadan



16-chizma.

$$\begin{cases} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

ekani ravshan. (1.9) ga binoan nuqtaning «yangi» koordinatalariga ko’ra uning «eski» koordinatalarini topish mumkin.

(1.9) formuladan H X (1.10)

I/ = У - У«

nuqtaning «eski» koordinatalariga ko’ra uning «yangi» koordinatlarini topish formulasi kelib chiqadi. (1.9) ni **parallel ko’chirish formulasi deb** ataladi.

12- misol. Oxy «eski» sistemada M(3; 4) nuqta berilgan. Koordinata o'qlarini parallel ko’chirganda «yangi» sistemaning koordinatalar boshi «eski» sistemaga nisbatan 5 va -2 koordinatalarga ega bo’lsa, M nuqtaning *X,У* «yangi» koordinatalarini toping.

Yechish. (1.10) ga x-3, y-4, x_0-5, y_0--2 qiymatlarini qo’ysak .Y-3-5--2, У=4-(-2)=6 kelib chiqadi.

Dekart koordinatalar sistemasi Oxy: ning koordinatalar boshini O^x,,. y,,,-,) nuqtaga parallel ko’chirilganda parallel ko’chirish formulasi

x = A' + x,,,

У = У + Уо, (1-9’) z = Z + z,,

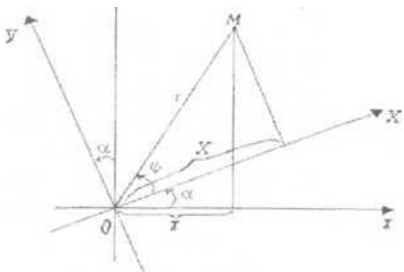
ko’rinishga ega bo’lishini ta‘kidlab o’tamiz.

2. Koordinata o’qlarini burish. Tekislikda umumiy 0 koordinitalar boshiga ega ikkita dekart koordinatalar siistemalari Oxy (eski) va OA'У (yangi) ni qaraymiz. Bu yerdagi “yangi” sistema “eski” sistemani o’qlarini a burchakka burish oqibatida hosil bo’ladi(17 chizma).

Tekislikni ixtiyoriy M nuqtasini x,y “eksi” koordinatalari bilan uning A',У “yangi” koordinatalari orasida bog’lanish o’rnatamiz. Ikkita qutb koordinatalar sistemalarini kiritamiz. Qutb o’qi Ox bilan ustma-ust tushgan “eski” va qutb o’qi 0.V bilan ustma-ust tushgan “yangi” qutb sistemalarini qaraymiz.

Har ikkala sistemaning qutbi koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushadi deb qaraymiz. Faraz qilaylik M nuqtaning yangi qutb sistemasiga nisbatan qutb radiusi r, qutb burchagi *(p* bo’lsin.

+ J



U holda M nuqta cski qutb sistemasiga nisbatan *r* qutb radiusiga va a t-<£> qutb burchagiga ega ekanligi 17- chizmadan ko’rinib turibdi. Shuning uchun (1.6) ga asosan

x = /• cos(a + /?)

y - rsin(a + /?)

bo’ladi. Elementar matematikadagi ikki

17- chizma.

burchak yig’indisining kosinusi va sinusi uchun chiqarilgan formulalardan foydalanib quyidagiga ega bo’lamiz: A-~/-(coscr cos</> -sincrcin^)=(/cos^)cos«-(rsin</>)sincr,
y=/(sina COS^H sin^cosa)-(rcos<p)sina->-(/‘sin<p)coscr,
Ammo *rcosqr-X, rsm(fF=Y* bo’lgani uchun

,v = zVcosa-Ksina,

y - У sin a + У cos a

bo’ladi. (1.11) formula **koordinata o’qlarini** burish_formulasi deyiladi.

(1.11) ga ko’ra nuqtaning eski koordinatalarini uning yangi koordinatalariga asosan topish mumkin. Nuqtaning yangi koordinatlarini uning eski koordinatalariga asosan topish formulasini (1.11) sistemani *X, У* ga nisbatan yechib hosil qilish mumkin.

13- misol. Yangi sistema eski sistemani o’qlarini 45' ga burish natijasida hosil bo’lsa, nuqtaning x, y eski koordinatalarini uning *X, У* yangi koordinatalari orqali ifodalang.

Yechish. cos45°=—, sin45°=— bo’lgani uchun (1.11) formulaga binoan:

iVIustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. 0 son /V, *Z.,Q,R* to’plamlarining qaysi biriga tegishli emas.
2. Jw *(n€N)* qachon ratsional son bo’ladi.
3. Sonlar o’qida 4; 2,5; -5 va v'3 haqiqiy sonlarga mos nuqtalar yasalsin.
4. Koordinatalari quydagi tenglamalarni qanoatlantiruvchi nuqtalar yasalsin:

$X\frac{\sqrt{2}}{2} - Y\frac{\sqrt{2}}{2},$ yoki $\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y),$

$y = X\frac{\sqrt{2}}{2} + Y\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}(X$

1) 3 7 = 2 2) x^2-16=0; 3) x^2-5x+6-0;

4) x^2-4x+2=0; 5) 3^Y-~=0; 6)/og_2(2x-4)=3
81

5. Koordinatalar boshiga nisbatan A(+4), B(-3) vaC(Vs) nuqtialarga simmetirik nuqtalar topilsin.

6. Koordinatalar boshi 0i(+2) nuqtaga ko’chirilganda A(-2), !B(+5), C(-3) va D(-7) nuqtalarning koordinatalari qanday bo’ladi.

7. |x|<3 va |xj >2 tengsizliklar sonlar o’qida tasvirlansin.

8. A(-3) va B(7); C(+4) va D(-7); E(-l) va F(-5); 0(0) va Q(+77); K(-4) va 0(0) nuqtalar orasidagi masofa topilsin.

9. Tekislikda (7;2), (4;0), (-2;2), (0;4), (-3;-2) va (,/2;-V3) sonJIar juftligiga mos nuqtalar yasalsin.

10. Koordinatalari 1) 3x-6, lx +*y* 25,
(y - 3x = 9. [x + y = 7.
tenglamalar sistemasining yechimidan iborat nuqtalar yasalsin.

11 .Abssissalari -4, -3, -2, 1, 2, nuqtalardan iborat va ordiinatalari y = 2x+l tenglama yordamida aniqlanuvchi nuqtalar yasalsin.

12. Koordinatalar boshi, abssissalar va ordinatalar o’qlariga nisbatan A(3;4), B(3;0), C(0;-2) va D(-2;3) nuqtalarga simmetrik nuqtalar yasalsin. Ularning koordinatadari topilsin.

13. Kvadratning tomonlari 3 ga teng.
Koordinata o’qlari: 1. Kvadratning noparallel tomonlari bo’yicha;
2. Kvadratning diagonallari bo’yicha; 3. Kvadratning tomonlariga parallel bo’lib uning markazida kesishuvchi to’g’ri chiziqlar bo’yicha yo’nalganda kvadrat uchlarining koordinatalari topilsin.

14. A(-4;2) va B(0;-l) nuqtalar orasidagi masofa topilsin.

15. Uchlari A(-l;-l), B(-l;2), C(2;2) va D(2;-l) nuqtalarda bo’lgan to’rtburchakning kvadrat ekanligi isbotlansin.

16. Uchlari A(-5;3), B(-l;0) va C(2;4) nuqtalarda bo’lgan uchburchak yasalsin. Uning perimetri va burchaklari topilsin.

17. Mj va M_2 nuqtalarni tutashtiruvchi kesma o’rtasining koordinatalarini toping: 1)M,(5;3) va M_2(7;5). 2) M,(-12;0) va M_2(0;8).

18. M!(3;-2) va M_2(4;-3) nuqtalarni tutashtiruvchi MjM_2 kesmadagi N nuqta uni
2
M|N:NM_2=- nisbatda bo’ladi. N nuqtaning koordinatalarini toping.

19. M|M_2 kesmaning boshi M)(2;5) va uning o’rtasi N(3;-4) berilgan. Kesmaning oxiri M_2 topilsin.

20. Uchlari A(l;2), B(0;5) va C(-2;3) nuqtalarda bo’lgan uchburchak mcdianalarining kesishish nuqtasi topilsin.

21. Uchlari Mj(x;6) va M_2(-3; y) nuqtalarda bo’lgan kesma N(2;-2) nuqtada teng ikkiga bo’linadi. M| va M_2 nuqtalarni toping.

22. (2;3;5), (-2;2;3), (3;-2;-4) va (-2;-3;-4) haqiqiy sonlarning uchligiga mos *Oxyz* fazoning nuqtalari yasalsin.

23. A(-;2), B(-;4), C('--;3), D(— ;4) va E(-^;3) nuqtalarning qutb koordinatalar sistemasiga nisbatan o'rni topilsin.

24 Qutb koordinatalari A(^;V2), B(^;4), C(^;4^2), D(^;2), E(^;3)
4 3 4 6 3
nuqtalarning dekart koordinatalari topilsin.
25. Dekart koordinatalari A(3;-2), B(-l;-l), C(3;0), D(0;-4) nuqtalarning qutb koordinatalari topilsin.
26. 2, 302 (112), 7з, Vs, *я,е* sonlardan ratsional sonni toring.
B)e D) У5 E) 2,302 (112) F) 7з.
27. Ikki to'g'ri chiziqning kesishishidan hosil bo'lgan burchaklarning kattaliklari nisbati 6:4 da teng. Shu burchaklardan kattasini toping.
A) 108" 13)114" D)120" E) 126" F) 132".
28. Олу sistemani 0Д-3;2) nuqtada parallel ko'chirish natijasida nuqta (-8,7) koordinatalarda ega bo'lgan bo'lsa o'sha nuqtaning *Oxy* sistemaga nisbatan koordinatalari topilsin.
A) (73) B) (2;9) D) (6;6) E) (-10,9) F)(-ll,9).
29. Agar «yangi» sistema «eski» sistemani 60"da burish natijasida hosil bo'lgan bo'lsa, u holda «eski» sistemadagi (3;2) nuqta «yangi» sistemada qanday koordinatalarga ega bo'ladi.

0)^4] .

E)(- 2,1) F) +

/ 5 \
30. Qutb sistemasidagi I *arctg* ; 729 i nuqtaning Dekart koordinatalari topilsin.
к 2 J
A) (2;5) B) (-2;5) D) (2;5) va (-2;-5) E) (2;5) va (-2 ;5) F) (2;5) va (2;-5).

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Natural son nima?
2. Butun son nima?
3. Ratsional son nima?
4. Irratsional son nima?
5. Haqiqiy son nima?
6. Haqiqiy sonning geometrik tasviri nima?
7. Haqiqiy sonning absolyut qiymatini taTiflang.
8. To'g'ri chiziqning ikkita nuqtalari orasidagi rnasofa qanday topiladi.
9. Tekislikda dekart sistemasi qanday aniqlanadi.
10. Tekislikda nuqtaning dekart koordinatalarini taTiflang.
11. Tekislikning ikki nuqtasi orasidagi masofani topish formulasini yozing.
12. Kesmani berilgan nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalarini topish formulasini keltirib chiqaring.
13. Fazodagi nuqtaning dekart koordinatalarini taTiflang.

14. O’qlar orasidagi burchakni ta‘riflang.
15. Qutb koordinatalar sistemasini ta‘riflang.
16. Nuqtaning dekart va qutb koordinatalari orasidagi bog’lanishni ifodalovchi formulalarni yozing.
17. Parallel ko’chirish formulasini yozing.
18. Koordinata o’qlarini burish formulasini yozing.

2- ma‘ruza. Mavzu: Determinantlar va ularning xossalari.

Reja:

1. Ikkinchi tartibli inantlar.
2. Minor va algebraik to’determinantlar.
3. Uchinchi tartibli determIdiruvchi.
4. Determinantlarning asosiy xossalari.
5. n-tartibli determinant haqida tushincha.

Adabiyotlar: 3,5,6,7,10,11,15.

Tayanch iboralar: determinant, satr, ustun, element, diagonal, minor, algebraik to’ldiruvchi.

2.1.Ikkinchi tartibli determinantlar

an, «12. «2i. «22 sonlar berilgan bo’lsin.

Bu sonlardan tuzilgan «п«22-«12 «21 ifoda(son) **ikkinchi tartibli determinant** deb ataladi va

«и я12

a 21 a 11

ko’rinishida yoziladi.

Demak ta‘rifga binoan

0 11 ° 12

«21 «22

<7]i, c/12. «21, «22 sonlar determinantning —«I I«22*«12 «2! • (2.1)

elementlari deb ataladi.

Ikkinchi tartibli determinantlar ikkita gorizantai va ikkita vertikal qatorlarga ega. Gorizantai qatorlarni **satrlar,** vertikal qatorlarni **ustunlar** deb ataymiz. Satrlar yuqoridan pastga qarab,ustunlar esa chapdan o’ngga qarab sanaladi. Ikkinchi «И tartibli determinantda birinchi satrni, <?21, «"^ ikkinchi satrni " birinchi «2!

ustunni, *a.,* esa ikkinchi ustunni tashkil etadi. Shuningdek *a22* ikkinchi tartibli dctirminant.ning bosh diagonalini a,2 Г72) uning yon (yordamchi) diagonalini tashkil etadi. Shunday qilib ikkinchi tartibli determinantni hisoblash uchun bosh

diagonal elementlari ko’paytmasidan yon diagonal elementlari ko’paytmasini ayirish lozim ekat?-

I 2

1-misol.

2-niisol. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = 10 + 12 = 22$

3-misol. $\begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ \text{sill}\ a & -\cos a \end{vmatrix} = -\cos a - \sin a$ 2 • 2

2.2. **Uchinchi tartibli determinantlar**

"22 "23 "32 "33 —"12 "21 "23 "31 "33 +"|3 ^21 ^22 " 3) "32

Yechish. (2.2) formulaga binoan

ifoda yordamida aniqlanadigan son **uchinchi tartibli determinant** deyiladi va a 11 " 12 a 13

" 21 a 22 " 23

"31 a ct 33

kabi belgilanadi. Bu yerdagi <7ц, </|2,..., sonlar ma'lum sonlar bo'lib ular determinantning elementlari deyiladi.

Uchinchi tartibli determinant uchta satr(gorizonta) qator), uchta ustun (vertikal qator) va to'qqizta elementlarga ega. Ta'rifga binoan:

" 11 "12 " 1
$a_{2}| \ a_{22} \ a$ 23 ="11 "22 "23 "32 -<712 "21 "23 "31" +"13 "3) " >2 " 31 "32 (2.2)
$a .) \ ct ._{2} \ a$

4-misol. hisoblansin.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6-20-2(-2-8)+3(-5-6)=$$

=-14+20-33=20-47=-27.

Determinantning har bir elements ikki xonaii indeksga ega bo'lib ulardan birinchisi shu element turgan satrning nomerini, ikkinchisi shu element turgan ustunning nomerini bildiradi. Masalan <732 element uchinchi satr va ikkinchi ustunda turadi. a_u *ch?* uchinchi tartibli determinantning bosh diagonalini, <713<722<73J uning yon diagonalini tashkil etadi.

2.3. Minor va algabraik to'ldiruvchi

Determinantni biror elementining **minori** deb, determinantdan bu element turgan satr va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan detcrminantga aytiladi. $<7>_k$ (i,k=l,2,3) elementning minori Л7,* kabi belgilanadi. Uchinchi tartibli determinant elementlarining minorlari ikkinchi tartibli determinant bo'ladi. Masalan:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & {}^{a}>3 \\ a_{21} & a_{22} & 3 \quad 2. \\ a_{31} & a_{32} & “33 \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$ son bo’ladi. Chunki Л/!2 ni topish uchun A determinantning birinchi satri va

determinant <7)? elementining minori $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ son, (723 elementining minori

ikkinchi ustuni Л/23 ni topish uchun esa shu a23 element turgan determinantning ikkinchi satri va uchinchi ustuni o’chiriladi.

^ik=(-l)l kHk (i,k=l,2,3) son <7ik elementning **algebraik to’kiiruvchisi** deb ataladi.

/1з2¯(■!)’ — $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$ bo’ladi.

Masalan A determinantning (732elementining algebraik to’ldiruvchisi

2.4. Determenantning asosiy xossalari

1. *Determinantning satrlarini unga mos ustunlar bilan almashtirish natijasida determinantning qiymati o 'zgarmaydi, ya ‘ni*

$$\begin{vmatrix} {}^{a}0^{a}\backslash 2^{a}13 & & \\ \hat{}21\ \hat{}22\ \hat{}23 & & \\ 31\ ^{a}32 & & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Я\ II\ Я\ 21\ Я\ 3) & & \\ {}^{a}12\ ^{a}22\ ^{a}32 & & \\ 13\ ^{a}23 & & 33 \end{vmatrix}$$

2. *Determinantning ikkita satr(yoki utsun)larini o’rinlarini almashtirish natijasida determinantning ishorasi o ’zgaradi xolos,* ya‘ni

$$\begin{vmatrix} (7_{u}\, a_{l2}\, a_{13} \\ (7_{21} <7_{„}\, a_{23} \\ {}^{\circ}31\ ^{0}32\ ^{a}33 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} «\ 11\ ^{a}13\ "\ 12 \\ U\ 21\ @\ 23\ \&\ 22 \\ 31 \quad 33 \quad 32 \end{vmatrix}$$

Bu yerda berilgan determinantning ikkinchi va uchinchi ustunlarini o’rinlari almashgan.

3. *Ikkita bir xil satr (yoki ustun)ga ega bo ’Igan determinant 0 ga tengdir.*

4. *Determinantning biror satr (yoki ustun) elementlarini biror Л songa ко paytirish determenantni shu songa ко pavlirishga teng kuchlidir.*

$$\begin{vmatrix} {}_{u}Л\, a_{12}\, a_{I3} \\ {}_{tz}A\, a\, a_{,,} \\ a_{3I}\, A\, a_{32}\, a_{33} \end{vmatrix} = Л \begin{vmatrix} {}^{a}11\ ^{a}12\ \hat{}13 \\ </_{2I}\, a_{,,}\ (z_{25} \\ *\ 31\ ^{0}32\ \hat{}33 \end{vmatrix}$$

Determinantning bu xossasiga asoslanib 3-xossani biroz kuchavtirish mumkin. Ya‘ni ikkita proporsional satr(yoki ustun)larga ega bo’lgan determinant nolga tengdir.

5. *Biror satr (yoki ustunjelementlari nollardan iborat determenant nolga tengdir.*

6 *Determinantning biror satr (yoki ustun) elementlarini biror songa ко ’paytirib boshqa bir satr (yoki ustun) ning mos elementlariga qo’shish natijasida determinantning qiymati o 'zgarmaydi, ya 'ni*

$$\begin{vmatrix} <7 \text{ и } & a_{12} & a_{13} \\ <7_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} <7 \text{ и } & <7_{12} + m\, a_{13} & a_{13} \\ <7_{21} & a_{22} \text{ -f } m a_{23} & a_{23} \\ a_{3!} & a_{32} + m\, a_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu yerda berilgan determinantning uchinchi ustun elementlari m songa ko’paytirilib ikkinchi ustinning mos elementlariga qo’shildi.

7. *Determinantning biror satrfyoki ustun) elementlarini ularning algebraik*

$$\begin{vmatrix} a \text{ и } & <7_{,,} & {}^{a}13 \\ a_{21} & 6/\,22 & “\,23 \\ a_{31} & 32 & <7_{33} \end{vmatrix}$$

to'ldiruvchilariga ko’paytirib qo’shsak yig’indi determinantning o’ziga teng bo ’ladi, ya ‘ni: determcnant uchun tengliklar o’rinlidir.

А~<7]1 Ац+<7|2 А|2+<3|3 $А_{13}$,
А=<?3I А31+ Й32 А32^’ <733 А33,
А ~*Cl*\2 А12+ <722 А22+ <?32 А32,

А= А—<7э) А21^ <722 А22^'<723 А23, Д~<7|1
Ац + <721 А21+ <7з| А31,
А=<7|3 А13+ <723 А23+ <733 А33

Determinantning bunday yozilishi uning satr yoki ustun elementlari bo’yicha **yoyilmasi** deyiladi. Masalan, keltirilgan tengliklardan birinchisi A determinantning birinchi satr elementlari bo’yicha yoyilmasini ifodalasa, oxirgisi uni uchinchi ustun elementlari bo’yichayoyilmasini ifodalaydi.

Bizyuqorida keltirgan uchinchi tartibli determinantning ta‘rifi uning birinchi satr elementlari bo’yicha yoyilmasi ekan.

Izoh. Determinantning qaysi qatorida nol ko’p bo’lsa, uni o’sha qator elementlari bo’yicha yoyish ma‘quldir.

5-misol. 1 2 5 determinant hisoblansin.

Yechish. Determinantning birinchi ustun elementlarini -2 ga ko’paytirib ikkinchi ustunning mos elementlariga qo’shamiz, keyin hosil bo’lgan determinantning birinchi ustun elementlarini -5 ga ko’paytirib. uchinchi ustunning mos elementlariga qo’shamiz. U holda

$$\begin{vmatrix} 2\ 3 & 4 \\ 1\ 2 & 5 \\ 47 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4+.3 & 10+4 \\ 1 & -2+2 & -5+5 \\ 4 & -8+7 & -20+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\text{-}1 - 6 & & \\ 1\ 0\ 0 & & \\ 4 & -1 & -14 \end{vmatrix}$$

hosil bo’ladi. Oxirgi determinantni ikkinchi satrida nollar ko’p bo’lganligi sababli uni o’sha satr elementlari bo’yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\begin{matrix} -6 \\ O \\ -14 \end{matrix} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -14 \end{vmatrix} = -(14-6) = -8.$$

8. *Determinantning biror satr (yoki ustun) elementlarini unga parallel boshqa bir satr (yoki ustun)ning mos elementlarining algebraik to 'ldiruvchilariga ко 'paytirib qo 'shsakyig'indi nolga teng bo 'ladi.*

Bu holda ikkita bir xil satr (yoki ustun)ga ega bo'lgan determinant hosil bo'ladi. Masalan, a, M_2i^+«i2 $A_2$2+«1зA_{23}=0.

Bu yerda A determinantning birinchi satr elementlari ikkinchi satming mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shildi.

Keltirilgan barcha xossalarning ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar uchun to'g'riligiga bevosita determinantlarni hisoblash yo'li bilan ishonch hosil qilish mumkin.

Xossalarni o'rinli ekanligini tekshirib ko'rishni o'quvchiga qoldiramiz.

2.5. n-tartibli determinant haqida tushincha

и-tartibli determinant deb *n* ta satr, *n* ta ustun va *tf* ta elementiarga ega bo'lgan

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \end{matrix}$$

kabi bclgilanuvchi songa aytiladi

Yuqorida keltirilgan determinantning barcha xossalari istalgan tartibli determinantlar uchun ham o'rinlidir. Tartibi to'rt va undan yuqori bo'lgan determinantlarni determinantning 7-xossasidan foydalanib tartibini pasaytirish orqali hisoblanadi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Masalan, to'rtinchi tartibli determinantni (2.2)formulaga o'xshash

$$+a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

formula yordamida hisoblash mumkin.

Bu yerdagi uchinchi tartibli determinantlar mos ravishda a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} elementlarning minori deyiladi. a_{ik}(i,k=l,2,3,4) elementning algebraik to'ldiruvchisini A_{ik} orqali belgilasak (2.3) tenglikni

$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$ ko'rinishida yozish mumkin.

Bu formula to’rtinchi tartibli determinantni uning birinchi satr elementlari bo’yicha yoyilmasidir. Bunaqa yoyilmani har bir satr va ustun elementlari uchun yozib to’rtinchi tartibli determinantni hisoblash uchun 8 ta formulalarni hosil qilishimiz mumkin.

3 2 0 1

6-misol. A determinant hisoblansin

2 4-3-2

Yechish. Determinantning xossalaridan foydalanib A determinantning biror satri (yoki ustuni) ni ba‘zi elementlarini 0 ga aylantiramiz Determinantning birinchi satrini -3 va 2 ga ko’paytirib uning uchinchi va to’rtinchi satrlarning mos elementlariga qo’shamiz. U holda

$$A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ -6 & -7 & -2 & 0 \\ 8 & 8 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

hosil bo’ladi. Buning oxirgi ustunida nollar ko’p bo’lganligi uchun uni o’sha ustun elementlari bo’yicha yoyib hisoblaymiz:

$$A=1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -6 & -7 & -2 \\ 8 & 8 & -3 \end{vmatrix}=-(-2)\begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 8 & 8 \end{vmatrix}=$$

=2(21+16)+(18+16)-4(-48+56)=76.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. Determinantlar hisoblansin:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 12 & 10 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+A' & 1 \\ 1 & 1 & 1+J2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$ ■ f) $\begin{vmatrix} 1 & a & a'' \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$, g) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & & \end{vmatrix}$

Javob: a)28; b)-2; d).xy e)-2(c/$^?$+Z+); Q(d^Z>)(Z>-cj(c-a); g)-50.

2 Determinantlar soddalashtirilsin:

	cos a	sin /?	1		sin a	sin	Z? 1		1	cosa	cos/?
a)	sin a	cos Д	1	**. b)**	- cos a	cos	Z? 1	; d)	cosa	1	cos(cr + />)
	0	0	1		0	0	1		cos/?	cos(tz + /7)	1

Javob: a) cos(a + /?); b) sin(<x + /?); d) 0;

3.

a) $\begin{vmatrix} x^2 & 9 & 4 \\ x & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 0; b) $\begin{vmatrix} x & -4 & 6 \\ -1 & X & -3 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ = 0 d) $\begin{vmatrix} 9 & x & 2x \\ 10 & 3 & 5 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ = 0;

tenglamalardan x topilsin.

Javob: a) x_t-3, $x:_2$=2; b) X]=2, x_2=-y; d)x=2.

4. $\begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ determinantning a., elementini minori topilsin.

A) 11 3) 19 D)-ll

5. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 01 \\ 5 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ determinantning a_{21} elementini algebraik to'ldiruvchisi topilsin.

A) 5 B) 7 D) 2 E)

6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 6 & 19 & 13 & 20 \\ 1 & 16 & 30 & 40 \\ 9 & 6 & 3 & -6 \end{vmatrix}$ hisoblansin.

A) 12 B)51 D) 14

7. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \\ 3 & -6 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ hisoblansin.

A) 3 B) 4 D) 2 E)0 F)-2.

8. Determinantiarni hisoblamasdan quyidagi amallardan qaysi birini bajarish mumkin.

A) qo'shish B) ayirish D) ko'paytirish E) bo'lish F) hech birini bajarish mumkin emas.

9. To'g'ri javob topilsin.

A) determinantni songa ko'paytirish uchun uning biror satr (yoki ustunjining barcha elementlari shu songa ko'paytiriladi

B) determinantni biror songa ko'paytirish uchun uning barcha elementlari shu songa ko'paytiriladi

D) determinantni songa ko'paytirish mumkin emas

E) determinantni songa ko'paytirish uchun uning biror satr elementlarini o'sha songa ko'paytirib shu satrga mos ustunning eiementlariga qo'shiladi

F) bir xil tartibli determinantiarni qo'shish mumkin.

10. To’g’ri javob topilsin.

A) Bir xil tartibli determinantiarni hisoblamasdan taqqoslash mumkin

B) istalgan determinantiarni hisoblamasdan taqqoslash mumkin

D) determinantiarni hisoblamasdan taqqoslab bo’lmaydi

E) bir determinantning barcha elementlari ikkinchi determinantning mos elementlaridan katta bo’lgandagi o’sha determinantdan katta bo’ladi

F) tartibi yuqori determinant katta bo’ladi.

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

1. ikkinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
2. Uchinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
3. Determinantning elementlari nima?
4. Determinantning satr va ustunlari, hamda bosh va yon diagonallari nima?
5. Determinantni songa ko’paytirish nimani anglatadi?
6. Bir xil tartibli determinantiarni mos elementlarini qo’shish yoki ayrish mumkinmi?
7. Istalgan tartibli determinant qanday hisoblanadi?
8. Minor va algebraik to’ldiruvchi nima?
9. Determinantni biror satr yoki ustun elementlari bo’yicha yoyish deganda nimani tushunasiz?
10. Determinantni qaysi qator elementlari bo’yicha yoygan ma‘qul?

3- ma‘ruza. Mavzu: Chiziqli tenglamalar sistemasini determinantlar yordamida yechish. Kramer qoidasi

Reja:

I Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi.
2. Uch noma'lumli ikkita bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.
3. Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi.
4. Uch noma'lumli uchta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.
5. *n* noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi.

Adabiyotlar: 3,5.6.7,10.11,15.

Tayanch iboralar: sistema koeffitsienti, ozod had, sistemaning yechimi, birgalidagi sistema, aniq sistema, aniqmas sistema, birgalikda bo’lmagan sistema.

3.1.Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

$$G|i\, x + a_{)2} v = b\backslash ,$$
$$a_2,x + a_{22}v\text{-}b_2 \qquad (3.1)$$

ni qaraymiz. Bu yerdagi *x* va *y* noma‘lum sonlar, qolgan barcha sonlar esa ma‘lum. $a_{(1}$. a_{12} a_{21} a_{22} lar sistema koeffitsientlari, *b*\ va Z>$_2$ sonlar esa ozod had (son)lar deb ataladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish degan so’z, noma'lum sonlarning shunday qiymatlari to’plamini topish dcmakki, ularni sistema tenglamalarining har biriga mos noma‘lumlarning o’rniga qo’yilganda ular ayniyatlarga aylanadi. Bunday sonlar to’plami sistemaning yechimi deyiladi. Kamida bitta yechimga ega bo’lgan sistema **hirgalikdagi sistema** deb ataladi. Birgina yechimga ega bo’lgan birgalikdagi sistema **aniq sistema** deb ataladi. Cheksiz ko’p yechimlarga ega bo’lgan birgalikdagi sistema **aniqmas sistema** deb ataladi. Birorta ham yechimga ega bo’lmagan sistema **birgalikda bo’lmagan sistema** deyiladi.

Izoh. Keltirilgan ta'riflar istalgan sistema uchun o’rinlidir.

(3.1) sistema bizga o’rta maktab kursidan ma‘lum . Uni yechishning o’riniga qo’yish, qo’shish va grafik usullari bilan tanishmiz.

Bu yerda (3.1) sistemani yechishning yana bir usuli ya‘ni uni determinantlardan foydalanib yechish usuli bilan tanishamiz. Sistemaning birinchi tenglamasini a_{22} ga, ikkinchisini -<r/| $_2$ ga ko’paytirib hadlab qo’shamiz:

(ZZ] |6/$_{22}$-<7$_2$|<7|$_2$)x~6|t7$_2$2”^2^ 12- (3-2)

Shuningdek sistemaning birinchi tenglamasini -a_{21} ga, ikkinchi sini *a*$_}$] ga ko’paytirib hadlab qo’shsak

(a 11 *a*$_{22}$-*a*$_2$1 *a\2)y=b*$_2$*a*$_{22}$- *b*$_}$*a*$_{i2}$ (3.3)

hosil bo’ladi.

Z>l 67„ | , д„= | </н A$_1$ 67,j b_2 | (3-4)

belgilashlarni kiritamiz.

Sistemaning koeffitsientlaridan tuzilgan A determinant sistemaning *asosiy* determinant! deb ataladi. A_v determinant A dagi birinchi ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida, A_v esa A dagi ikkinchi ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo’ladi.

(3.4) dan foydalanib (3.2) va (3.3) formulalarni

A x = A 1

(X5)

ko’rinishida yozish mumkin.

Mumkin bo’lgan quyidagi hoilarni qaraymiz.

1. Sistemaning asosiy determinanti A70 bo’lsin. U holda (3.5) ning har bir tenglamasini A ga bo’lib

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad (3.6)$$

berilgan sistemaning yechimini topish formulasiga ega bo’lamiz. (3.6) formulalar uning ixtirochisi Shvetsariyalik matematik Kramcr(1704-1752)ning sharafiga Kramer formulalari deb ataladi.

II. Sistemaning asosiy determinanti АД) bo’lsin.

Bu holda quyidagi lardan biri bo’ladi.

1) $Д_x$—$Д_y$=0 bo’lsin. U holda (3.5) 0 x=0, 0- y=0 ko’rinishini olib berilgan sistema cheksiz ko’p yechimlarga ega, chunki istalgan son bu tenglamalarni qanoatlantiradi.

2) A_x, A_y lardan kamida bittasi masalan A_x^0 bo’lsin. U holda (3.5) ni birinchi tenglamasi 0x=$Д_x$/0 ko’rinishiga ega bo’lib, u yechimga ega emas. Demak, bu holda berilgan sistema yechimga ega bo’lmaydi.

Xulosa. a) (3.1) sistemaning asosiy determinant! A#0, ya‘ni *aңa₂2^- a₁₂a₂* yoki fulfil bo’lganda bu sistema yagona yechimga ega bo’lib, uning yechimi Kramer °2t ᵃ22 formulalari (3.6) yordamida topiladi.

b) A-A_x=A_v=0 ya‘ni —0-==-t- bo’lganda
y «21 «22 b_2

(3.1) sistema cheksiz ko’p yechimlarga ega (aniqmas);

d) A=0 bo’lib A_x, A_y lardan kamida bittasi noldan farqli ya‘ni

«21 «22 b_2

bo’lganda sistema yechimga ega bo’lmaydi (birgalikda emas).

(3.1) sitemaning yechimiga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. (3.1) sistemaning har bir tenglamasi to’g’ri chiziq tenglamasini ifodalashi ayon.

— * — bo’lganda to’g’ri chiziqlar parallel bo’lmaydi. Demak har ikkala л,,
a,.
to’g’ri chiziq bitta nuqtada kesishadi. Ana shu kesishish nuqtasining koordinatalari (3.1) sistemasining yechimi bo’ladi.

«I l_ _ «12 _ ^l_
Д=$Д_x$=$Д_y$=0 ya‘ni «21 «22 $^b2$ bo’lganda to’g’ri chiziqlar ustma-ust tushadi (sistema cheksiz ko’p echimlarga ega). A=0 bo’lib $Д_x$, $Д_y$ lardan kamida bittasi noldan farqli bo’lganda to’g’ri chiziqlar parallel bo’lganligi sababli ular kesishmaydi (sistema yechimga ega bo’lmaydi) ya‘ni birgalikda emas.

1- misol. Asror uchta daftar va ikkita ruchka uchun 205 so’m, Umida esa xuddi shunday 4 daftar va bitta ruchka uchun 190 so’m sarfladi. Daftar va ruchkaning narxi aniqlansin.

Yechish. Daftar narxinLv, ruchka narxini *y* orqali belgilaymiz. U holda

I3.v + 2y = 205,
|-1.v 190

sitemaga ega bo'lamiz. 13u sistemani Kramer formulalaridan foydalanib yechamiz:

1 3 2 1
1 4 1 1 =3-8=-5#0, | 205 21 $Д_x$=|190 l|

(3.6) formulalarga asosan:

3 205
4 190=570-820^-250.

, = ^ = Z!2J = 35. ,,=^ = ^ = 5O.
A -5 A -5

Demak daftar 35 so’m, ruchka 50 so’m turar ekan.

2-misol.

12л+ 5; 3, sJstema yechilsin.
[4x + 10y = 6

Yechish.

$$д=\begin{matrix} 2 & 5 \\ 4 & 10) \end{matrix} =20-20=0,\ Д_г=$$

Sitemaning birinchi tenglamasini 2 ga ko’paytirsak uning ikkinchi tenglamasi kelib chiqadi. Demak sistema bitta 2x+5y=3 tenglamaga teng kuchli va cheksiz ko’p yechimlarga ega. *y* ga ixtiyoriy qiymatlar berib *x* ni tenglamadan

aniqlash yo’li bilan yechimlar topiladi.

Masalan, y=0 da x=-,y=l dax=-l va hokazo.
3

Bu geometrik nuqtai nazardan 2x+5y=3 va 4x+10y=6 to’g’ri chiziqlar bitta to’g’ri chiziq ekanini bildiradi.

3- misol.

i5x + 3y-7, sistema yechilsin.
[10x + 6_y = 2

Yechish.

$$д=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} =30-30=0,\ Д_л.= \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} =42-6=36\#),\ Д_y= \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} =10-72=-6\#0.$$

o' . Н1ДПЭГ

Sistemaning asosiy determinant! Д =0 bo’lib Д#0, $Д_y$/0 bo’lgani uchun sistema yechimga ega emas(birgalikda emas).

Л-х.' v nS< ПГД jpfjn

3.2.lJch noma‘lumli ikkita bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

$$tap- + a_1,y+a_{l3}z = 0,$$
$$[a_{21}x + a_{22}\ v + a,_3z = 0 \qquad £)$$

sistemani qaraymiz. Bu yerdagi л-, *y* va *z* noma‘lumlar, qolgan barcha sonlar ma‘lum sonlar. Ozod sonlari nolga teng bu sistema bir jinsli sistema deyiladi. (3.7) sistemani yechish bilan shug’ullanamiz.

I «11 «12

Faraz qilayiik bo'lsin. | «21 «22

U holda sistemani

$$la_{ir}r + a_{l2}y =$$

nt

-i- $a_{22}y$ - $\sim a_{2y}z$ ko’rinishida yozamiz. Bu sistema *z* ning har bir aniq qiymatida yagona yechimga ega bo’lib yechim Kramer formulalariga ko’ra

- ^{a}* *12

-"2 3 *22

A' - > v 1 1 ,p

"H ^2 "l> "12

«21 °22 *21 ^22

kabi topiladi. Determinantning xossalari (umumiy ko’paytuvchini determinant belgisidan chiqarish mumkinligi hamda ikkita ustunlarini o’rin almashtirganda determinantning faqatgina ishorasi o’zgarishi) dan foydalanib yechimni ko’rinishda yozamiz.

deb belgilasak z=K bo’lib uni (3.8) ga qo’ysak

$$x=K\begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{22} a_{23} \end{vmatrix}, \quad y=-K\begin{vmatrix} a_{11} a_{13} \\ a_{21} a_{23} \end{vmatrix}, \qquad (3.9)$$

qaralayotgan sistemaning yechimlari kelib chiqadi. (3.7) sistemaning yechimiga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. Sistemaning har bir tenglamasi koordinatalar boshidan o’tuvchi tekislik tenglamasini ifodalaydi. Tekisliklarning har ikkitasi koordinatalar boshidan o’tganligi sababli ular kesishadi. Ikkita kesishuvchi tekisliklar to’g’ri chiziq bo’ylab kesishadi. Ana shu to’g’ri chiziq nuqtalarning koordinatalari sistemaning yechimi bo’ladi.

Xulosa. Bir jinsli (3.7) sistema yagona yechimga ega bo’lishi yoki yechimga

ega bo’lmasligi mumkin emas. U har doim cheksiz ko’p yechimlarga ega (aniqmas).

4-misoI

x-i-3y-2z=0,
\2x-y+3z=0

sistema yechilsin.

Yechish. (3.9) ga asoslanib

|3 -21 |1 ~^{2}I |1 ^{3}I
л'-К|-I 3 ! “7K, y--K |2 3 1 =-7K. -K |2 -I =-7K

larni hosil qilamiz. Shunday qilib berilgan sistemaning yechimlari x-7K, y=-7K, z=-7K tcngliklar yordamida aniqlanadi. K ga aniq son qiymatlarini qo’yib sistemaning har xil yechimlarini topiladi.

3.3. Uch noma‘lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi

Uch noma‘lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi

«,,X + <7$_{12}$J2 + «$_{|3}$7 = *Ь}* ,
< «$_{2|}$x + $a_{22}y$ + «$_{23}$z = b_2, (3.10)
$a_{3l}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$

ni qaraymiz. Bu yerdagi *x,y* va *z* noma‘lum sonlar, qolgan barcha sonlar ma‘lum sonlar. «и, «12,•■■,«33 sistemaning koeffitsientlari, b_j,b_2, va b_3 ozod sonlar. Barcha ozod sonlar nolga teng bo’lganda (3.10) sistema **bir jinsli** deyiladi.

(3.10) sistemani yechish bilan shug’ullanamiz. Noma‘lumlar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan uchinchi tartibli

$$A=\begin{vmatrix} «_{11} & «_{12} & «_{13} \\ «_{21} & «_{22} & «_{23} \\ «_{31} & «_{32} & «_{33} \end{vmatrix}$$

determinant (3.10) sistemaning **asosiy** determinant! deb ataladi. Berilgan sistemani yechish uchun sistemaning birinchi tenglamasini «ц elementning algebraik to’ldiruvchisi ga, ikkinchi tenglamasini $«_2$i elementning algebraik to’ldiruvchisi A_{2l} ga va uchinchi tenglamasini $«_{3!}$ elemcntining algebraik to’ldiruvchisi $Л_3$| ga ko’paytirib tenglamalarni hadma-had qo’shamiz.

(«i i A | j+«2i A_3i+«3i $A_3$1)x+(«] $_3$A]]+«22A2i+«32A_3i).v+(«:3 A i (t«2_3 A2]t«3_3 Аз:)г— —Ь\ A]]+/>2A21+6_3A_3|. (3.11)

Birinchi qavs ichidagi ifoda A determinantning birinchi ustun elementlari bo’yicha yoyilmasi bo’lganligi uchun determinantning 7-xossasiga ko’ra «]iAn+«2iA2i+$«_3$|A_3i=A bo’ladi. (3.11) dagi ikkinchi va uchinchi qavs ichidagi it'odalar A determinantni ikkinchi va uchinchi ustun elementlarini boshqa bir ustunning mos elementlarining algebraik to’ldiruvchilariga ko’paytirib qo’shilganligi uchun determinantning 8-xossasiga ko’ra ular nolga teng bo’ladi. Shunday qilib (3.11) tenglik

A_x=6)Лц+&2^21'*‘^3^31 (3.12)

ko’rinishga ega bo’ladi.

determinantni qaraymiz. E‘tibor bersak bu determinant asosiy determinantdagi birinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirish natijasida hosil bo’lganligiga iqror bo’lamiz. Ru determinantning *h2) b3)* elementlarining algebraik to’ldiruvchilari mos ravishda A determinantning «ц,«2ь«з1 elementlarining algebraik to’ldiruvchilariga tengligini hisobga olsak /’iA_1|+6_2A2i+$b_3A_{13}=A_x$ bo’lib (3.12) tenglik

Д-х = $Д_г$ (3.13)

ko’rinishini oladi.

Shunga o’xshash Ду = д,,, Дг = $Д_х$ (3.14) tengliklarni hosil qilamiz, bunda

$$Дy=\begin{vmatrix} <7и & by & a_{13} \\ <7_{21} & b_2 & a_{23} \\ °\text{-i} & & a\text{-}_л \end{vmatrix} \wedge \amalg \begin{vmatrix} Пи & <?_{l2} & by \\ \hat{}21 & \hat{}22 & \hat{}2 \\ & °32 & ^{b}3 \end{vmatrix}$$

$Д_y$ determinant sistemaning asosiy determinant]' Д dagi ikkinchi ustun elementlarini ozod sonlarga, $Д_2$ esa Д dagi uchinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirish natijasida hosil bo’ladi.

Mumkin bo’lgan qo’yidagi hollarni qaraymiz:

I. (3.10) sistemaning asosiy determinant! Д/0 bo’lsin. U holda (3.13) va (3.14) tenglamalarni har birini A ga bo’lib

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

formulalarga ega bo’lamiz. (3.15) **Kramer formulalari** deb ataladi. Shunday qilib (3.10) sistemaning asosiy determinant! Д#0 bo’lganda sistema yagona yechimga ega bo’lib yechim Kramer formulalari (3.15) yordamida topilar ekan.

II. (3.10) sistemaning asosiy determinant Д=0 bo’lsin. U holda qo’yidagilardan biri sodir bo’ladi.

a) A_x, A_y, $Д_2$ determinantlardan aqaili bittasi noldan farqli. Bu holda (3.10) sistema yechimga ega bo’lmaydi. Haqiqatan, aniqlik uchun $Д_x$/0 deb faraz qilsak bu holda Д x = $л_д$. (3.13) tenglik Ол-Д^О ko’rinishiga ega bo’lib, u л- ning hech bir qiymatida bajarilmaydi.

b) $Д=Д_x=Д_y=Д_2=0$ bo’lsin. Bu holda (3.10) sistema yo yechimga ega bo’lmaydi yoki cheksiz ko’p yechimlarga ega bo’ladi.

5- misol. Javohir oltita daftar, ikkita ruchka va bitta chizg’ich uchun 380 so’m sarfladi. Jasur xuddi shunday to’rtta daftar, bitta ruchka va ikkita chizg’ich uchun 370 so’m, Behruz ham o’sha narxda 8 ta daftar, ikkita ruchka va uchta chizg’ich uchun 640 so’m sarfladi. Daftar, ruchka hamda chizg’ichning narxlari aniqlansin.

Yechish. Daftar, ruchka hamda chizg’ichlarning narxlarini mos ravishda lar orqali belgilaymiz. U holda masalani yechish

(6x + 2y + z = 380,
;4.v + y + 2r = 370,
[вл-+ 2y + 3z = 640

sistemani yechishga keladi. Bu sistemaning y echimini Kramer formulaiaridan foydalanib topamiz

$$Д=\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad -6\begin{vmatrix} 1\ 2\ I\ 1421 \\ 2\ 3\ j\ \text{-}2\ j\ 8\ 3\ j\ +1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$$

Sistemaning asosiy determinantidagi birinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirsak

$$\begin{vmatrix} 380 & 2 & 1 \\ 370 & 1 & 2 \\ 640 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 38 & 2 & 1 \\ 37 & 1 & 2 \\ 64 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

hosil bo'ladi. Bu yerda birinchi ustundan umumiy ko'paytuvchi 10 determinant belgisidan chiqarildi. So'nggi determinantni birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib A_v ni hisoblaymiz.

f |l 2l
A_v =10 38 -37
IP 3|

Sistemaning asosiy determinant! A dagi ikkinchi ustun elementlarini ozod sonlar ga almashtirsak

$$A_y = \begin{vmatrix} 6 & 380 & 1 \\ 4 & 370 & 2 \\ 8 & 640 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 10 \begin{vmatrix} 3 & 38 & 1 \\ 2 & 37 & 2 \\ 4 & 64 & 3 \end{vmatrix}$$

hosil bo'ladi. Bu yerda determinantning birinchi ustunidan umumiy ikkinchisidan 10 determinant belgisidan chiqarildi. Oxirgi determinant

(1 2 2 1 3 11 I 3 1 Й
A_y=20 i-38 +37 -64 2 2 •20(-38-(-2)+37-5-64-4)=100.
I 1 4 3 1 1 4 3| |

ko'paytuvchi 2, determinantni ikkinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib $A_y$ni hisoblaymiz.

Shuningdek

$$Д_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 380 \\ 4 & 1 & 370 \\ 8 & 2 & 640 \end{vmatrix} = 2\cdot 10 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 38 \\ 2 & 1 & 37 \\ 4 & 2 & 64 \end{vmatrix} = 2\cdot 10\cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 38 \\ 2 & 1 & 37 \\ 2 & 1 & 32 \end{vmatrix}$$

$$=40\left(38\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 37\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 32\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) = 200$$

ga ega bo'lamiz.

Kramer formulalari (3.15) dan foydalanib

Av 60 л Av 100 /V ?oo
x=~-=—=3Q y=-^-=--=5Q 2=fh = ±^ = 1oo
A 2 A 2 A 2

yechimni hosil qilamiz.

Shunday qilib daftar 30 so'm. ruchka 50 so'm va chizg'ich 100 sum turar ekan. p.v + 3y+r = 2,

6- misol. ч,v-4v + 2s = 4, sistema yechilsin.

[+v + 6p f- 2. = 0

Yechish. Bu yerda

3 1
д= -42 =o,
6 2

chunki determinantning birinchi va uchinchi satr elementlari proporsional.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Bu determinantning birinchi satrini -1 ga ko’paytirib ikkinchi satrning mos

$\Delta_x=4$

elementlariga qo’shsak

hosil bo’ladi. Bu determinantni uning birinchi ustun elementlari bo’yicha yoyib

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

hisoblaymiz. $Д_x$=4-2- $\begin{vmatrix} -5 & 0 \end{vmatrix}$ =8-(-5)=-40*0.

Demak berilgan sistema Л=0, $Д_x$* 0 bo’lganligi sababli yechimga ega emas.

7- misol.

|x + .v-2z = -2,
<2A- + 2_y-4z = -4,
|3x + 3y-6z = 0

sistema yechilsin.

Yechish. Bevosita hisoblash yo’li bilan $Д=Д_x=Д_y=Д_2=0$ ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin. Qaralayotgan sistema yechimga ega emas, chunki sistemaning birinchi va uchinchi tenglamalari bir-biriga zid. Haqiqatan, sistemaning birinchi tenglamasini -3 ga ko’paytirib uchinchisiga qo’shsak 0=6 qarama-qarshiiikka kelamiz.

8- misol.

p.x + 2y-z = 5,
]бл+4y-2г = 10,
[A--3V + S = -2

sistema yechilsin.

Yechish. Bevosita hisoblab $Д=Д_x=Д_y=Д_2=0$ ekanligini topamiz. Sistemaning birinchi tenglamasini 2 ga ko’paytirsak uning ikkinchi tenglamasi kelib chiqadi. Shuning uchun berilgan sistema

[3x + 2y-z = 5,
- 3 v + z = -2

uch noma‘lumli ikkita tenglamalar sistemasiga teng kuchli. Bu sistema cheksiz ko’p yechimlarga ega. Yechimlar noma‘lumlardan biri masalan л ga aniq qiymatlar berib sistemadan *y* va *z* ni topish orqali aniqlanadi.

Izoh.

$р_{1Г}$x + $и_{12}$y+a_{13}з=Ц, Яц_ й12
i , sistema — = — =—*—• shartda aniqmas bo ladi.
[$n_{2г}$v+<7_{21})M-<2,^=0,, a_n a_{23} b_2

Xulosa. a) Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi (3.10) sistemaning asosiy determinant A*0 bo'lganda yagona yechimga ega bo'lib yechim Kramer formulalari (3.15) yordamida topiladi.

b) Д=0 bo'lib A_x , Ay, A_z determinantlardan aqalli birortasi noldan farqli bo'lganda (3.10) sistema yechimga ega emas.

d) $A=A_x=A_y=A_z=0$ bo'lganda (3.10) sistema yo yechimga ega emas yoki cheksiz ko'p yechimlarga ega.

3.4. Uch nomatumli uchta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

a|pг+ц₁y+ц₃г=0,

< *a*, ^*x*+*a*₂₂*y*+*a*₂^ =0, (3.16)

sistemani qaraymiz. л—0, *y=0, z=0* sistemaning yechimi bo'lishi ko'rinib turibdi. Bu holda kamida bitta ustuni nolga teng bo'lganligi uchun $Д_x=Д_y=Д_2$^0 bo'lib (3.13) va (3.14) tengliklar Ал-0, Д-y=0, A z=0 (3.17) ko'rinishga ega bo'ladi. Agar (3.16) sistemaning asosiy determinant Д-/0 bo'lsa u yagona x=0, y=0, r=0 yechimga ega bo'ladi. Qaralayotgan bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimlarga ham ega bo'la oladimi degan savolga quyidagi teorema javob beradi.

3.1-teorema. (3.16) sistema noldan farqli yechimlarga ega bo'lishi uchun uning asosiy determinant Д=0 bo'lishi zarur va yetarlidir.

Haqiqatan. Sistema noldan farqli yechimlarga ega, masalan *x** 0 bo'lsin. U holda (3.17) ning birinchi tenglamasi Д-x~0 dan Д-0 kelib chiqadi.

Teskarisi, ya'ni sistemaning asosiy determinant Д=0 bo'lganda sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishini ko'rsatish ham mumkin.

3.5. n nomatumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi

Umumiy holda n nomatumli n ta chiziqli tenlamalar sistemasi

|Л| 4" 67 p X 2 4- • • • + u₁,.x,, = *by*,

л21л") + a22x2 + ' ■ ■ + *a*₂,,*x*,, = *b*₂

Vl +иг;,2*2 +' =*b*,,

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerdagi *xi*,*x*₂, •••>*ₙlar noma'lumlar, b,,b₂,..., bₙ ozod had (son) lar hamda <7ц,бг₁₂,..., <7ₙг koeffitsientlar ma'lum sonlar.

Yuqorida keltirilgan Kramer qoidasi noma'lumlar soni tenglamalar soniga teng bo lgan istalgan (3.18) ko'rinishdagi sistama uchun o'rinli ekanligini ta'kidlab o'tamiz. Sistemaning asosiy determinant A^0 bo'lganda u yacona yechimga eaa bo'lib, yechim Kramer formulalari yordamida topiladi. Bu yerdagi Д determinant (3.18) sistemaning

$$x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta} \quad - - \frac{A\text{-}U}{{}^2A}, \quad x_n=\frac{\Delta x_n}{\Delta}, \qquad (3.19)$$

noma'lumlari oldidagi koeffitsientlaridan tuzilgan bo'lib, $A_{V)}$,$A_v$$A_v$ determinantlar undagi birinchi, ikkinchi va hokazo n-ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladi.

Shuni aytish joizki, sistemadagi noma'lum (tenglama)lar soni orta borga$_n$ sari uni Kramer usuli bilan yechish qiyinlasha boradi.

Mustaqil yechish uchun rnashqlar va test savollari

I .Tenglamalar sistemasi yechilsin. x

[3x + 2y = -4, =

[a] [2,y - 5,v ~ 29. [2x-2y = 6.

d) f2.x + 3y = 6.

[4л + 6y = 0.

'2x-y + 5z = l,

< x + y-z = 2,

5x + y-7z -6.

(x - 3 v + 2z = 1, *[2x-y* + 3z = 6, i)

k) j2x + y-3z = 5, -j2x+v-z = 3.

i2.v-6v + 4 j = 2. [4x + 2y-2z = 0.

Javob: a) (2;-5); b) Cheksiz ko'p; d) yechimga ega emas;
e) *x-5K, y=-4K, z~K* f) x=3, y=Л'+3, *z-K* g) (1; 1; 0); k) sistema cheksiz ko'p yechimga ega; i) sistema yechimga ega emas.

2. Ikki noma'iumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasining yagona yechimga ega bo'lishi nimani anglatadi.

A) sistemaning tenglamalari ifodalovchi to'g'ri chiziqlarning paralleiligini
B) to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarligini
D) to'g'ri chiziqlarning ustma-ust tushishini
E) to'g'ri chiziqlarning kesishishini
F) to'g'ri chiziqlardan kamida bittasining koordinata o'qlarining biriga parallelligini.

3. Kramer qoidasidan qanaqa tenglamalar sistemasini yechishda foydalaniladi.

A) har qanday ikki noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasini yechishda
B) uch noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini yeching
D) har qanday uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasini yechishda
E) noma'lumli soni tenglamalari soniga teng istalgan chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda
F) faqatgina noma'lumlari va tenglamalari soni beshdan oshmaydigan chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda.

4. Uch noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasining yagona yechimga ega bo'lmasligiga sistemaning tenglamalari ifodalovchi tekisliklarning quyidagi xossalaridan qaysi biri asosiy sabab bo'ladi?

A) yagona umumiy nuqtada ega bo'iaolmasligi
B) paralleltigi D) perpendikulyarligi
E) to'g'ri chiziq bo'ylab kesishishi F) ustma-ust tushishi.

5. Maktab kursida ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning necha xil usuli bilan tanishiladi.

A) 1 B >2 D) 3 E)4 F) 5

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

1 Chiziqli tenglama nima?

? Sistema qachon birgalikda, qachon aniq, qachon birgalikda emas va qachon aniqmas deyiladi?

3 Kramer formulalarini keltirib chiqaring.

4. Sistema qachon yagona yechimga ega?
5. Sistema qay vaqtda aniqmas bo’ladi?
6. Uch noma‘lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo’laoladimi?
7. Bir jinsli chiziqli tenlamalar sistemasi birgalikda bo’lmasligi mumkinmi?
8. Noma‘lumlari soni chiziqli tenglamalari soniga teng sistemaning yechimi qanday topiladi?
9. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasini noldan farqli yechimga ega bo’lish shartini ayting.
10. Kramer formulalari qanaqa sistemalar uchun o’rinli?

4- Ma’ruza. Mavzu: Matritsalar va ular ustida amallar

Reja:

1. Matritsa haqida tushincha.
2. Matritsalarni tengligi.
3. Matritsalarni qo’shish.
4. Matritsani songa ko’paytirish.
5. Matritsalarni ko’paytirish.
6. Birlik matritsa.
7. Teskari matritsa.
8. Matritsaning rangi va uni hisoblash.

Adabiyotlar: 3,5,6,7,10,11,15.

Tayanch iboralar: matritsa, xos marritsa, xosmas matritsa, birlik matritsa, teskari matritsa.

4.1. Matritsa haqida tushincha

Ma’lum sonlardan tuzilgan

6/ j. ^13

4 .. '22) V -1 22 23 24 7 <*3! Cl ,, Г7,, (4.1)

kabi jadvallar **matritsa** deb ataladi. u_{tt} ,$U|_2$, ... 6/ 22 *33

sonlar esa matritsaning **elementlari** deyiladi. Jadvalning gorizantal qatorlari matritsaning satrlari, vertikal qatorlari esa uning **ustunlari** deyiladi. Satrlari soni ustunlari soniga teng matritsa **kvadrat matritsa** deyiladi va satrlari yoki ustunlarining soni shu matritsaning tartibi deyiladi. Masalan (4.1) dagi birinchi matritsa ikkinchi tartibli, uchinchi matritsa esa uchinchi tartibli kvadrat matritsadir. Satrlari soni ustunlari soniga ten bo Imagan matritsa **to’g’ri burchakli matritsa** deyiladi. m ta satrli va n ta ustunii to g ri burchakli matritsa **mxn o’lchamli matritsa** deyiladi. Masalan (4.1) dagi ikkinchi matritsa 2x4 o’lchamli to’g’ri burchakli matritsa. Yagona satrga e bo’lgan matritsa satr-matritsa, yagona ustunga ega bo’lgan matritsa **ustun matritsa** deb ataladi. Masalan (a,, *a*$_{l2}$ *a*$_{j2}$*)* satr-matritsa, j " esa ustun-matritsadir.

Kvadrat matritsaning elementlaridan matritsa belgisini determinant belgj$_S$j bilan almashtirish natijasida hosil bo’lgan determinant shu **matritsaninp determinant!** deyiladi. Matritsani qisqacha bitta A barf bilan belgilasak uning determinant! det A yoki |/1| kabi belgilanadi. Masalan AH «12 «21 matritsaning

«II «12 I

determinanti |/4j = «21 «22 | bo’ladi.

Determinant! noldan teng kvadrat matritsa xos matritsa deyiladi. farqli kvadrat matritsa xosmas, determinant! nolga

Masalan:

O

:) matritsa xos matritsa, chunki |zt' =

esa xosmas matritsa, chunki |/?| =

l«2l

4.2. Matritsalarning tengligi

Bir xil o’lchamli A va B matritsalarning barcha mos elementlari o’zaro teng bo’lganda ular teng (A=B) deb ataladi.

Masalan:

matritsalar <7ц = 6$_н$, a$_t$a= b_n , $a\backslash_3$=b_{J3},

«2i ^2i ’ «22-^22 ’ «23“^2? bo’Iganda teng bo’ladi (A=B).

4.3. Matritsalarni qo’shish

Ikkita bir xil o’lchamli matritsaning **yig’indisi** deb ularning elementlarini mos qo’shish natijasida hosil bo’lgan matritsaga aytiladi, ya‘ni

matritsaning

yig’indisi deb

«i2 + ^i2 «is Mi

«22 + ^22 «21 + ^21)

matritsaga aytiladi.

f 2 з) з -1

1-misol. I ва matritsalarning

I ’ OJ t'1 2 J

yig’indisi topilsin.

Yechish.

P 3W3 _,П2+3 3-15 2)

I I °J I~> 2 И 0 + 2J 1° 2 J

Matritsalarning yig’indisi uchun A+B=B+A, (A4B)+C~A3 (B+C) tengliklar o’rinli.

Barcha elementlari noilardan iborat matritsa **nol matritsa** deb ataladi va (0) yoki 0 kabi belgilanadi. Istalgan A matritsa uchun A 4-0=A bo’ladi, bu yerdagi 0 matritsa A bilan bir xil o’lchamli nol matritsa.

4.4. Matritsani songa ko’paytirish

Matritsani **songa ko’paytmasi** deb matritsaning barcha elementlarini shu songa ko’paytirish natijasida hosil bo’lgan matritsaga aytiladi.

f «12 f ma_{lt} ma_{l2} ma_{iy}

A= «22 «23, bo’lsa mA=Am= $ma_{,,}$;пп22 w«23,

К

bo’ladi. Matritsani nolga ko’paytirish natijasida noi-matritsa hosil bo’ladi.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ matritsa 3 ga ko'paytirilsin.

Masalan,

Yechish.

3 f1 3 "'Vf3·1 3·3 3·(-1)^ 3·3 3·4 «22*21 + «23*31 23J [3-3 3(-l)jj3 9 -3^

3-4 3-2 J 12 6 J

4.5. Matritsalarni ko’paytirish

2-misol. «12 «13 ' *12 *13 '

A «21 «22 « ’3 matritsaning B= «и *21 ^22 *23

<«31 «32 «33, Л. ^2 *зз,

matritsaga ko’paytmasi deb elementlari quyidagicha aniqlanuvchi C-AB matritsaga aytiladi

«11*11 + «12*21 + «13*31 «11*12 + «12*22 + «13*32 «11*13 + «12*23 + «13*33

$a^b_r + a^b-,, + a_rb.y$ o-.\b^ + 4 ci^b^

.«31*1! + «32*21 + «33*31 «31*12 + «32*22 + «33*32 «31*13 + «32*23 + «33*33 ,

Matritsalarni bu xilda ko’paytirish **satrlarni ustunga** deb yuritiladi. Matritsalarni ко paytirish qoidasi birinchi ko’payuvchining ustunlari soni ikkinchi ко payuvchining satrlari soniga teng bo’lgan har qanday to’g’ri burchakli matritsalar uchun o’rinlidir.

3-misol. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

matritsalarning ko’paytmasi topilsin.

Yechish. AB ko’paytma mavjud, chunki A matritsaning ustunlari 2 ga teng B matritsaning satrlari soni ham 2 ga teng.

(i П |, \ Г 1 • 2 + 1 • 1 ■(-!)+ 1 • 2 > f з Г
i 2 1 |f2-13 ! ■ 1 , П 2›2 + b 1 2-(-l)+l 2 = 5 0
i-11; |I 1 1 j 1 -2 + 1 • 1 '•2> l-l *1|

B-A ko’paytma mavjud emas, chunki B matritsaning ustunlari soni 2 ga, д matritsaning satrlari soni esa 3 ga teng. Bu misol umumiy holda matritsalarni ko’paytirish o’rni almashtirish xossasiga ega emasligini ko’rsatadi, ya‘ni umumiy holda AB z BA.

Matritsalarni ko’paytirish quyidagi xossalarga ega.

1) (AB)C=A(BC); 2) (A+B)C=AC+BC; 3) (шA)B-ш(AB);
4) det(AB)=detA-detB.

Bu yerdagi A,B,C lar matritsalar bo’lib ular uchun yuqoridagi ko’paytirish va qo’shish amallari o’rinli, m-biror son.

4.6. Birlik matritsa

Bosh diagonalida turgan barcha elementlari 1 ga teng bo’lib qolgan elementlari 0 dan iborat kvadrat matritsa **birlik matritsa** deb ataladi va E orqali belgilanadi.

Masalan E=| ikkinchi tartibli birlik matritsa, to ij
<10 0>
E= 0 1 0 esa uchinchi tartibli birlik matritsadir.
too 1J

Birlik matritsaning determinanti lga teng, ya‘ni |E|=1.

Istalgan A kvadrat matritsani uning tartibiga mos birlik matritsaga ko’paytirish natijasida o’sha matritsaning o’zi hosil bo’ladi, ya‘ni A-E=E-A=A.

Ikkita sonlardan kamida bittasi nol bo’lgandagina ularning ko’paytmasi nol bo’lishi ma‘lum. Matritsalarni ko’paytmasi bunaqa xossaga ega emas, ya‘ni ikkita noldan farqli matritsalarning ko’paytmasi nol matritsa bo’lishi ham mumkin.

Masalan

I1 'if ' 1 "I (1-1-11 1-I-1-1 У/0 о3
I1 1JI"1-• Д11 I I- I ! J I»«J

4.7. Teskari matritsa

A kvadrat matritsaga **teskari matritsa** deb A-B=B-A=E shartni qanoatlantiruvchi B matritsaga aytiladi. A matritsaga teskari matritsa odatda A’1 kabi belgilanadi. A,B va E matritsalarning bir xil tartibli bo’lishi rovshan. Boshqacha aytganda ko’paytmasi E birlik matritsaga teng A va B kvadrat matritsalar o’zaro teskari matritsalar deyiladi. Har qanday kvadrat matritsaga teskari matritsa mavjudmi degan savolga quyidagi teorema javob beradi.

4.1-teorema. A kvadrat matritsaga teskari A matritsa mavjud bo'lishi uchun *A* matritsaning xosmas matritsa bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti. Zarurligi. Faraz qilaylik A ga teskari A'^{1} matritsa mavjud bo'lsin. U holda

Л-/4'$^{1=}$E,p| p '($^=$ PI $^=$ ^ bo'ladi. Bundan | *0, ya'ni *A*

matritsaning xosmasligi kelib chiqadi.

a_{11} a_{12} a_{13}

Yetarliiigi. Osonlik uchun uchinchi tartibli xosmas matritsani qaraymiz. Bu holda

(A

$$\begin{matrix} A_{21} & A_{31} \\ A_{22} & A_{32} \\ A_{23} & A_{33} \end{matrix}\Bigg) \qquad (4\text{-}2)$$

^{л}п

32

matritsa A matritsaga teskari matritsa ekanligiga bevosita ularni ko'paytirish yo'li bilan ishonch hosil qilish mumkin. Ko'paytirish jarayonida determinantning 7- va 8- xossalaridan foydalaniladi. Bu yerda Aj|<(i,k= 1,2,3) orqali $c/_{lk}$ elementning algebraik to'ldiruvchisi bclgilangan.

4-misol.

A=

matritsaga teskari matritsa topilsin.

Yechish.

2 1 -I

determinantni birinchi satr elementlarini uchinchi satrining mos elementlariga qo'shsak

$$|.4|= \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{matrix}$$

bo ladi. Buni uchinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz.

= -13^0.

Demak berilgan matritsa xosmas matritsa va unga teskari A'^{1} matritsa mavjud.

$4, =(-')'^{+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=2, \quad 42=(-0^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

Topilgan qiymatlarni (4.2) ga qo'yib teskari matritsani aniqlaymiz.

f _ 2_ A 2 1

f 2 -5 2 13 13 ' 13

= -3 I-3 = A _A A .

13 13 13 13

< 14 ~9 1 J A A L

ч 13 13 " 13 ,

A A=E tenglik o'rinli ekanini tekshirib ko'rishni o'quvchiga tavsiya etamiz.

Lr1

A matritsa va unga teskari $A'^{]}$ matritsaning determinantlari uchun

ekanini ta'kidlab o'tamiz.

4.8. Matritsaning rangi va uni hisoblash

To'g'ri burchakli yoki kvadrat *A* matritsa berilgan bo'lsin. Matritsaning Ata satr va o'shancha ustunlarini tanlab ularni kesishish joyida turgan elementlardan joylashish tartibini o'zgartirmagan holda k-tartibli deteminant tuzamiz. Ana shu determinant A matritsaning k-tartibli **minori** deb ataladi. Matritsaning elementlarini uning birinchi tartibli minori deb hisoblash mumkin.

Masalan

'«11 «12 «1.1 «A

«21 «22 «2.1 «24

(«31 «.12 «1.1 «34 >

matritsa 4 ta uchinchi tartibli, 18 ta ikkinchi tartibli va 12 ta birinchi tartibli minorlarga ega.

Ushbu : H determinant qaralayotgan matritsaning ikkinchi tartibli |«.i.i «и! minorlardan biri bo'lib u matritsaning birinchi va uchinchi satrlarini hamda uchinchi va to'rtinchi ustunlarini tanlash natijasida hosil bo'lgan.

Agar *A* matritsaning /--tartibli minorlari orasida kamida bitta noldan farqlisi mavjud bo'lib, undan yuqori tartibli qolgan barcha minorlari nolga teng bo'lsa, u holda butun /■ son *A* matritsaning rangi deyiladi va ra/?g,4 = r yoki >;(= r kabi yoziladi.

Boshqacha aytganda *A* matritsaning noldan farqli minorining eng yuqori tartibiga shu matritsaning rangi deb atalar ekan.

Nol matritsadan farqli istalgan matritsaning rangi natural son bo'ladi.

5-misol.

-71 ...i O'

A=| 2 0 1

1 1 1 7

matritsaning rangi topilsin.

Yechish. Matritsa yagona uchinchi tartibli

- 1

0

1

minorga ega bo'lib u 0 ga teng(hisoblansin). Odan Ikkinchi tartibli minorlari orasida

farqlilari mavjud, masalan

Demak matritsaning rangi 2 ga teng ekan.

Matritsaning rangini topishda ko'p sonli determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. Shuning uchun matritsani rangini hisoblashda uni elementar almashtirish deb ataluvchi almashtirishdan foydalanish maqsadga muvofiq. Matritsani **elementar almashtirish** деб quyidagi almashtirishlarga aytiladi.

a) faqat nollardan iborat satr (ustun)larni o'chirish;

b) ikkita satr (ikkita ustunjlarni o'rinlarini almashtirish;

d) bir satr(ustun)ning barcha elementlarini biror songa ko'paytirib, boshqa satr(ustun)ning mos elementlariga qo'shish;

e) satr(ustun)ning barcha elementlarini noldan farqli bir xil songa ko'paytirish.

Agar *B* matritsa *Л* matritsadan elementar almashtirishlar yordamida hosil qilingan bo'lsa ,4 va *B* **ekvivalent** matritsalar deyiladi hamda ,4~й kabi yoziladi.

4.2-teorema. Elementar almashtirishlar natijasida matritsaning rangi o'zgarmaydi.

Teoremaning isboti determinantlarning xossalaridan kelib chiqadi.

6-inisol. A=

-6

5 matritsaning rangi topilsin. 13 *J*

Yechish. Birinchi satrini

(-2) ga ko'paytirib uchinchi satrining mos elementlariga hamda birinchi satrini (-1) ga ko'paytirib to'rtinchi satrining mos elementlariga qo'shamiz:

' 2 1 3 x
- 1 2 5
$A\sim$ 1 - 2 - 5
4 10 J

Ikkinchi satrni uchinchi to’rtinchi satrga hamda ikkinchi satrni (-2) ga ко’ satrga qo’shsak " 2 I

- 1 2 3
0 0 5
4 0 0 0
0

kelib chiqadi. Oxirgi matritsaning rangi 2 ga teng, chunki 1 2 -5^0.

E‘tibor bilan kuzatsak bu misoldan shunga iqror bo’lamizki rangi 2 ga ten. *A* matritsaning birinchi va ikkinchi satr elementlari o’zaro chiziqli bog’lanmagj Boshqacha aytganda ulardan biri ikkinchisi orqali chiziqli ifodalanmaydi, ya‘ n $a = kp$ tenglikni qanoatlantiruvchi $\kappa = const$ son mavjud emas, bunda a-birinch satining elementi /? esa ikkinchi satrning *a* ga mos elementi.

A matritsaning uchinchi va to’rtinchi satr elementlari uning birinchi v ikkinchi satr elementlari bilan mos ravishda *2a-ft* va *2a + p* tengliklar orqal chiziqli ifodalanadi.

Endi shu fikrni umumlashtiruvchi teoremani keltiramiz.

4.3-teorema. Agar matritsaning rangi *r* ga teng bo’lsa u holda unda *r* t chiziqli bog’lanmagan satrlar mavjud bo’lib qolgan barcha satrlar shu *r* ta satrla orqali chizikli ifodalanadi, ya‘ni ularning chiziqli kombinatsiyasi bo’ladi.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

3, 2 P
1 3 4
1. *A* ! - 1 2 , matritsaning xos yoki xosmas matritsa ekanligi aniqlansin xosmas.

Javob:

2. | ' 2 3 5 | (0 1-1' |
43 2 ! va 3 2 1 matritsalarning
- 2 1 0 1 1 1 0
/ 2 4 4 x

Javob:

| matritsa 5 ga ko’paytirilsin. т к Г 20 15
Javob: i
5 25

1 "]

5 ko'paytmalar topilsin? -2J

(2 3^

4. -1 2 va

1^1

-d

Javob: va

3^

5. I ko'paytma mavjudmi? Javob: yo'q.

4 J

\ И

3 | matritsaga teskari matritsa topilsin?

6. 2 J

11 j

36

5

зГ

Javob: A^{-1}

7

36 ,

P matritsaga teskari matritsa mavjudmi? Javob: ha.

7. 1

\ haqida kcltirilganlardan noto'g'risini toping.

1) A) kvadrat matritsa B) ikkinchi tartibli matritsa D) xosmas matritsa

d E) birlik matritsa F) matritsaga teskari matritsa mavjud.

' 1 2 3 A

9. /1 =-2 0 4 |haqida keltirilganlardan noto'g'risi topilsin.

<5 2 -1J

A) *A* ga teskari A matritsa mavjud B) $A \blacksquare A'^{1} = E$ o'rinli, bunda E uchinchi tartibli birlik matritsa *D) A E - A* E) *A* va E matritsalarni qo'shish va ayirish mumkin.

10. A, B, C matritsalar uchun ko'paytirish va qo'shish amallari o'rinli bo'lganda quyidagi xossalardan qaysi biri har doim ham bajarilavermaydi?

A) (AB)C=A(BC) B) (A+B)OAC+BC D) (mA)B=m(AB) bunda m-aniq son E) det(AB)=detA detB F) AB=B-A.

11. Noto'g'ri javob topilsin.

A) A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo’|gan<j_a A-B mavjud
B) 0 matritsa A bilan bir xil o’lchamli nol matritsa bo’lganda A+0=A o’rinli
D) bir xil tartibli A va B kvadrat matritsalar uchun A-B mavjud
E) bir xil o’lchamli matritsalarni ko’paytirish mumkin
F) istalgan E birlik matritsa uchun detE=jE|-1.

1 2 A . . . .
O matritsaning son qiymati topilsin.

12. A=(

A) 4 B)2 f D) 6 E) 3 F) matritsa son qiymatga ega emas. 4j -1 ko’paytma topilsin.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$> 0,
A) ko’paytma mavjud emas B) 2 D) 9 E) 3 F) 7.

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Kvadrat matritsa nima? Uning determinantichi?
3. Xos va xosmas matritsalar deb qanday matritsalarga aytiladi?
4. Birlik matritsa nima?
5.Satr-matritsa nima?
6. Ustun-matritsa nima?
7. Matritsalar qaehon teng bo’ladi?
8. Matritsani songa ko’paytmasi qanday aniqlanadi?
9. Matritsalarni qo’shish va ayrish mumkinmi?
10. Matritsalarni ko’paytmasi qanday aniqlanadi?
11. Qaehon matritsalarni ko’paytirish mumkin?
12. Berilgan matritsaga teskari matritsa qanday aniqlanadi?
13. Har qanday matritsaga teskari matritsa mavjudmi?
14. Teskari matritsa qanday topiladi?
15. Teskari matritsaning determinantlari o’zaro qanday munosabatda bo’ladi?

5- Ma’ruza. Mavzu: Chiziqli tenglamalar sistemasini echishning matritsa va Gauss usullari

Reja.

1. Chiziqli tenglamalar sitstemasini matritsali yozilishi va yechilishi.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini vechishning Gauss usuli.
3. Chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirish Kroneker-Kapelh teoremasi

Adabiyotlar: 3,11.

Tayanch iboralar: matritsa, sistema, yechim, teskari matritsa, algebraik to’ldiruvchi.

5 1 Chiziqli tenglamalar sitstemasini matritsali yozilishi va yechilishi Osonlik uchun uch noma‘lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi + <7_{12}y + $a_{j3}z = b$,,

$$< a_{2l}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \qquad (5j)$$

$$[a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z - b_3.$$

ni qaraymiz.

$$A-\begin{vmatrix} 4i & «12 & «13 \\ «21 & ^{л}22 & «23 \\ <«31 & «32 & «33 > \end{vmatrix}, X=\begin{vmatrix} 'X \\ y \\ Ч - \end{vmatrix}. B=\begin{vmatrix} \\ b_e \\ ) \end{vmatrix}$$

beluilashni kiritamiz. U holda matritsalarni ko’paytirish qoidasiga binoan

$$A\text{-}X\text{-}\begin{vmatrix} 4 & «>2 & «13' \\ «21 & «22 & «23 \\ 4«31 & «32 & «33 J \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 'x^4 \\ y \\ \backslash^z) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ' a_{it}x + a_ny + a_{r>}z^y \\ a_2,x + <7_{„}J2 + \\ _4«_{)1}x + C?_{32}y\ 4“ «33\text{-} y \end{vmatrix}$$

bo’ladi. Shuning uchun (5.1) sistemani matritsalarni tengligidan foydalanib

$$\begin{vmatrix} \\ a_{2l}x + a_{22}y + a_{23}z \\ _4«3l^{x+} «32^{\wedge +} «33\text{-}_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \\ *2 \\ \end{vmatrix}$$

ko’rinishida yoki qisqacha AX=B (5.2) matritsali tenglama ko’rinishda yozish mumkin. (5.1) sistema (5.2) yordamida berilgan bo’lib A xosmas matritsa bo’lsa uni quyidagicha yechiladi. (5.2) tenglamaning har ikkala tomonini chapdan *A* matritsaga teskari /Γ^1 ga ko’paytirsak, Л'$^!$(Л-.¥)=Л'-B; (A"^{I}-A)X=A‘^{I}B, E-X=A’’B; X=A'$^!$-B bo’ladi.

X=A ' B (5.3) matritsali tenglama (5.2) ning yechimidir.

1- misol.

sistema matritsa Yechish.

$$\begin{cases} 2x-y + z = 3, \\ x+2y-2z = -l,\ 3x + \\ 2y - 3c = -2 \text{ jsulida} \\ \text{yechilsin.} \end{cases}$$

$$\text{Bu misolda A} \begin{vmatrix} '2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ <3 & 2 & ‹‹3; \end{vmatrix}, B-\begin{vmatrix} (\\ 1 \\ к \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f\,r \\ 1 \\ ,xJ^v \\ U\,j \end{vmatrix}$$

o lgani uchun berilgan sistemani A-X=B matritsali ko’rinishda va uning yec imini X-A B ko’rinishda yozish mumkin. A matritsaning determinant! satr elementlarini 2 ga ko’paytirib 2-satrning mos elementlariga qo’shamiz va [0S!] 0 Igan determinantni ikkinchi satr elcmenlari bo’yicha yoyib hisoblaymiz.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

bo'lgani uchun *A* xosmas matritsa va unga teskari Л'1 i ' ' matritsa mavjud

A matritsaning barcha elementlarini algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

2-21 *~2 I 1 2 I

2 -3 3 -3 ~‹3› 2H

Лз=(-1)^2,3 -1 2 =-7,

-1

=5, =5.

Algebraik to'ldiruvchilarning qiymatlarini (4.2) formulaga qo'yib *A"* teskari matritsani topamiz:

'-2 -1 n

-3 -9 5 I

7

-7

X, A~' va *B* matritsalarni *X-A^B* tenglikga qo'yamiz. U holda

$$=\frac{2}{}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & -9 & 5 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{}\begin{pmatrix} -6+1+0 \\ -9+9-10 \\ -12+7-10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

hosil bo'ladi. Bundan *x=^\,y=2,* =3 echimni hosil qilamiz.

5.2. Cliiziqii tenglamalar sistemasini vechishning Gauss usuli

Biz noma'lumlar soni tenglamalar soniga teng chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer va matritsa usuli bilan tanishdik. Bu usullarning zaif tomonlari shundaki, noma'lumlar soni biroz katta bo'lganda juda ko'p hisoblashlarni bajarishga to'g'ri keladi. Masalan to'rt noma'lumli to'rtta chiziqli tnglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yechish uchun beshta to'rtinchi tartibli determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. To'rtinchi tartibli determinant biror satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyilganda yoyilmada to'rtta uchinchi tartibli determinant qatnashadi. Demak jami 5-4=20 ta uchunchi tartibli determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. Besh va undan ortiq noma'lumlar qatnashgan sistema haqida gapirmasak ham bo'ladi.

Bunday hollarda chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss taklif etgan quyidagi usul bilan yechgan ma'qul.

Gauss usuli tenglamalardan noma'lumlarni ketma-ket yo'qotishga asoslangan bo'lib oxirgi tenglamada bitta noma'lum qoladi xolos. Undan noma'lumni topi° oxirgidan oldingi tenglamaga qo'yib ikkinchi noma'lum topiladi va hokazo shu arayon davom ettirilib topilgan noma‘lumlarning qiymatlarini birinchi tenglamaga qo’yib undan birinchi noma‘lum aniqlanadi.

' Gauss usuli bilan misolda tanishib cniqamiz.

2-misol.

$$2x + 3y - z + t = -2,$$
$$3x -_{y\,+} 2z - 3t = -3,$$
$$2x + \wedge - z + 2/ = 2, \qquad <^{54}>$$
$$x - 2y + z - l = \backslash$$

sistema yechilsin.

Yechish. Sistemani Gauss usuli bilan yechamiz. **1-qadam** *x* noma‘lumni sistemaning ikkinchi tenglamasidan boshlab barchasidan yo’qotamiz. Birinchi tenglamani x oldidagi koeffitsient 2 ga bo’lib sistemani

(5.5)

ko’rinishida yozamiz.

a) (5.5) sistemaning birinchi tenglamani -3 ga ko’paytirib ikkinchi tenglamaga qo’shsak

$$\square\ {}^{9}\ 3\ 3\ {}_{o}$$
$$-3x - -y + -z \sim -t = 3$$
$$2'\ 2 \qquad 2$$
$$+$$
$$3x - y + 2z - 3l = -3.$$

hosil bo’ladi.

b) (5.a) sistemaning birinchi tenglamasini —2 ga ko’paytirib uchinchi tenglamasiga qo’shsak

$$-2.x - 3y + z - 1 = 2$$

$$2.r + y - r + 2/ - 2.$$

kelib chiqadi. *

d) (5.5) sistemaning to’rtinchi tenglamasidan birinchisini ayirsak:

.V - 2-У + 2 - / = 1,

7 3 3 o
—y+-z--/=2
2 2 2

bo’ladi. Shunday qilib berilgan (5.4) sistema

i 3 1 1 i

2’ 2 2

Il 7 9 n

2 ‘ 2 2 (5.6)

- 2,v + 0 • z ч *l* = 4,

7 3 3
. — v + —z— *t* = 2
(2' 2 2

ko’rinishga ega bo’ladi.

2- qadam. (5.6) sistemaning ikkinchi tenglamasidan boshlab barchasidan y noma'lumni yo’qotamiz. Ikkinchi tenglamani *y* oldidagi koeffitsient g_a bo’lib sistemani

(5.7)

ko’rinishda yozamiz.

a) (5.7) sistemaning ikkinchi tenglamasini +2 ga ko’paytirib uchinchi tenglamaga qo’shamiz:

= 0,

+

-2 v + 0-r+ / =•: 4.

b) (5.7) sistemaning ikkinchi tenglamasini $\frac{7}{-}$ ga ko’paytirib to’rtinchi tenglamaga qo’shamiz:

$$\frac{7}{2}y - \frac{49}{22}z + \frac{63}{22}t = 0,$$

$$-\frac{7}{2}y + \frac{3}{2}z - \frac{3}{2}t = 2.$$

1«гЛ, = 2
22 22

8 15 э
уокl -Пг + п

Shunday qilib (5.7) sistema

$$y \quad \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t = -$$

$$+ \frac{9}{11}t = 0 \qquad (5.8)$$

$$\frac{29}{11}t = 4$$

ko’rinishni oladi.

3- **qadam.** (5.8) sistemaning to’rtinchi tenglamasidan z noma‘lumni 14

yo’qotamiz. Buning uchun sistemaning uchinchi tenglamasini - ga bo’lib uni

$$\begin{cases} x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t = - \\ y - \frac{7}{11}z + \frac{9}{11}t = 0, \end{cases}$$

$\frac{29}{14}$' $-\frac{22}{7}$’

$$-\frac{8}{11}z + \frac{15}{11}t = 2$$

ko’rinishda yozamiz. Bu sistemaning uchinchi tenglamasini ga ko’paytirib to’rtinchi tenglamaga qo’shamiz:

$$\frac{1}{7}t = -\frac{2}{7}.$$

Shunday qilib

(
Л-

(
5
.
9
)

L - _ 2_
7 ~ 7

Bu sistemaning oxirgi tinglamasida bitta / nornaql

sistemaga ega bo’lamiz.
undan oldingisida ikkita *z* va *t* noma‘lumlar, ikkinchi tenglamasida uchta' noma‘lumlar va birinchi tenglamasida barcha nomadumlar • *x, y* _ qatnashadi.

Endi nomadumlarni topish unchalik qiyin emas.

4- qadam. (5.9) sistemaning to’rtinchi tenglamasi -l/=_2 daM

topamiz. =

5- **qadam.** / ning topilgan qiymati 2 ni (5.9) sistemaning uchinc)

• 29 22 _ _ 29 22 7

tenglamasiga qo’yib *z* noma‘iumni topamiz: **z-—2 = —;** ‘ ' 7 7 ~7 = ’|

6- **qadam.** /-2, r-1 qiymatlarni (5.9) sistemaning ikkinchi tenglama!

7 9
y - —г + —*1* - 0 ga qo’yib *y* noma’lumni topamiz:

V - - - • I + — ■ 2 0; *y*+1 ~0, *y*-~—1 .
11 1)

7- **qadam.** Topilgan *y--l,* z=l, *1=2* qiymatlarni (5.9) sistemaning birinchi

3 I I
tenglamasi x-+ ■ y -z+--/=-l ga qo’yib x noma’lumni aniqlaymiz:

x+--(-l)--l + --2=-l; x = 0
2 2 2

Shunday qilib x = 0, *y=-\,* z-T, *t=2* ya’ni (0; -1; 1; 2) sonlar to’plami berilgan sistemaning yechimi bo’larekan.

Gauss usulining muhim tomoni shundan iboratki sistemani yechishdan oldin uni birgalikda yoki birgalikda emasligini aniqiashning hojati yo'q.

Agar sistema birgalikda va aniq bo’lsa bu usul xuddi yuqoridagi misoldagi singari yagona yechimga olib keladi.

Agar sistema birgalikda bo’lmasa bu usulning qaysidir qadamida yo’qotilishi lozim bo’lgan noma‘lum bilan birgalikda barcha noma‘lumlar ham yo’qolib keladi va lenglikning o’ng tomonida esa noldan farqli ozod son qoladi. j 3 x - y + 4 z = 6,

3-misol. (x + *2 y* - *z* - 3, (5.10)

[5 x + 3 y + 2 r = 8

sistema Gauss usuli bilan yechilsin. J

Yechish. 1-qadam. Birinchi va ikkinchi tenglamalami o’rin almash i birinchi tenglamadagi xoldidagi koeffitsientni 1 ga keltiramiz:

$$x + 2y - z - 3,$$
$$-3x - y + 4^{2} = {}^{6},$$

a) bu sistemaning birinchi tenglamasini -3 ga ko’paytirib ikkinchi tenglamasiga qo’shamiz: $\_\ 3x\_6y + 3\_ - =. -9,$

$$+$$
$$3x\_y + 4z = 6.$$

$$-7y + 7c = -3$$

b) (5.11) sistemaning birinchi tenglamasini -5 ga ko’paytirib uchinchi tenglamasiga qo’shsak _„is

$$5x + 3.y + 2r = 8.$$

$$-ly + 1z = -7$$

hosil bo’ladi. Shunday qilib (5.10) sistema $x+2y-z-3,$

$$< -1y + 1z - -3, \qquad (5.12)$$
$$-7J + 7Z = -7.$$

ko’rinishga ega bo’ladi.

2-qadam. (5.12) sistemaning ikkinchi tenglamasini -I ga ko’paytirib uchinchisiga qo’shsak uchinchi tenglamasidagi yo’qotilishi lozim bo’lgan y bilan bir qatorda z noma‘lum ham yo’qolib ketadi, ya‘ni.

$$7y-7z = 3,$$

$$-7y + 7z$$

$$0= -4$$

hosil bo’ladi.

Shunday qilib Gauss usuliga binoan sistema birgalikda emas, ya'ni yechimga ega emas ekan.

Agar sistema birgalikda, ammo aniqmas bo’lsa Gauss usulining qandaydir qadamida ikkita bir xil tenglamalarga ega bo’lamiz.

a ni bu holda tenglamalar soni noma‘lumlar sonidan bittaga kam bo’ladi. $^{r}3x - y + 4z = 6,$

4- misol. ($A + 2y - z = 3,$ sistema Gauss usuli bilan yechilsin.

$$[5x + 3y + 2z = 12$$

Yechish. Birinchi tenglamadagi x oldidagi koeffitsientni 1 <- maqsadida sistemadagi birinchi va ikkinchi tenglamalarni o’rinlariniVl * uni

^.ke4
■’аЧй

ko'rinishda yozamiz.

a) (5.13) sistemaning birinchi tenglamasini -3 ga ko'paytirib sist J ikkinchi tenglamasiga qo’shamiz:

$$- 3x - 6y + 3c = -9,$$
$$+$$
$$3x- y-t- 4c = 6.$$

$$-7y + 7r = -3$$

b) (5.13) sistemaning birinchi tenglamasini -5 ga ko’paytirib tenglamaga qo’shamiz:

$$- 5x -10 y + 5c - -15,$$
$$+$$
$$5x + 3y + 2c = 12.$$

$$-7y + 7c = -3$$

Shunday qilib

$$x + 2 y - z = 3,$$
$$.-7y+7z = -3.$$
$$-7,y+7z = -3$$

sistemaga ega bo’lamiz. Bu sistema uch noma‘lumli ikkita tenglamalar sistemasi f x +

$$2 y - z - 3,$$
$$I- 7 y + 7c = -3$$

ga teng kuchli. Oxirgi sistema esa cheksiz ko’p yechimlarga ega.

5.3 Chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirish. Kroneker-Kapelli teoremasi

Tenglamalari soni noma‘lumlari soniga teng chiziqli tenglamalar sistemasir Kramer hamda Gauss usullari yordamida tekshirish(echish)ni ku’rdik.

Endi tenglamalari soni noma'lumlari sonidan farqli, ya‘ni n ta noma‘lumli' ta chiziqli tenglamalar sistemasi

£/) |X(+ + ..

rz21X, + $a_{22}x_2$ +. ■ + ^2nXn =

(5.14)

b_m

^n,lX + "„2*2 +

:^2>

iz Bunda a-sistemaning koeffitsientlar!, Aj-nomaMumlar, 4,-ozod „Гdevi'ladi. i Idan ,L (- ga^a, *j* 1 dan n (, - 1.«) gacha barcha natural Had aΓ ni qabul qiladi. *a* , b_t-ma‘lum sonlar.

qiymat arm q (kamida bitta yechimga ega) bo’ladi dcgan

Shu

javob izlaymiz Javobni matritsa rangi tushunchasiga asoslanib benladi.

cavol^a j«*»**’* — «*

Sistemaning koeffitsientlaridan tuzilgan

' 0,1 «12 ■- «I»

"21 "22

@2n

< "/»! ^{a}m2 ^{a}nni J

matritsani hamda *A* matritsaga sistemaning ozod hadlari ustunini birlashtirish natijasida hosil bo’ladigan

' "12 - ^{a}\n ^{b}\

^{a}2\ °22 ^{a}2n ^{b}2

I ",,1 "»2 - J matritsani qaraymiz. *A* matritsa **sistemaning matritsasi, matritsa** deb ataladi. r, <r,, ekanligi ravshan. *B* **esa kengaytirilgan**

5.1-teorema(Kroncker-Kapelli). (5.14) chiziqli birgalikda bo’lishi uchun sistemaning matritsasi *A* tfmatritsaning ranglari teng bo’lishi zarur va yetarli.

tenglamalar sistemasi bilan kengaytirilgan

Isboti. Zarurligi (5.14) sistema birgalikda va л-, - a_t, x_2 = a_2, ..., x_n = a_n yechimga ega bo’lsin. U holda

■2 >•

"iAi + <7$_{12}$or$_2$ + .. + = ^{b}^

+ Я$_{22}$»$_2$ + . • + ^{a}2,^n = b_2,

yoki

A A + ",,,2«$_2$ + , = ^{b},,,

A, ~ ~ ",$_{j2}$cr, -... - *a a,* *0*

o rinli bo’ladi.

a o$_a$ tn’ *^{sa}n'^{n}8 oxirgi ustunidan *a,* ga ko’paytirilgan birinchi ustunni, keyin л-ustunni payingan ,kklnc1,11 ustunni va hokazo nihoyat *a,* ga ko’paytirilgan ’’ US,unn ^{a}У,гaт12-U holda (5.15) ga binoan s ga ekvivalent

$$= \begin{vmatrix} & ^{\wedge}12 \cdot & \blacksquare & \circ \dot{1} \\ {}^{Л}21 & ^{\wedge}22 \cdot & «2/, & 0 \\ I\ «„I & {}^{a}n2\ \blacksquare & \cdot\cdot\ {}^{a}{}_{„n} & \end{vmatrix}$$

matritsa hosil bo'lib B;~A bo'ladi. Demak r_H -?-$_{Wi}$ = /-,.

Demak (5.14) sistema birgalikda bo'lganda /-, - *r,,* bo'larekan.

Yetarliligi. $r_{(}$=r_w=r bo'lsin. (5.14) sistemaning birgalikda eka'J ko'rsatamiz. *A* matritsaning noldan farqli / -tartibli A minori uning yuqori had burchagida joylashgan deb faraz qilamiz. Aks holda noma'lumlar □ tenglamalarning o'rinlarini almashtirish yo'li bilan bunga erishish mumkin

A matritsa *B* matritsaga ham kiradi. 4.3-teoremaga binoan *A* va matritsaning ranglari /■ ga teng bo'lganligi sababli ularning r + l-satridan w-satrigacha barcha satrlari birinchi *r* ta satrlarining chiziqli kombinatsiyasidan: iborat bo'ladi. Bu (5.14) sistemaning *r* +1 -tenglamasidan boshlab qolgan barcha tenglamalari uning birinchi /• ta tenglamalarining natijasi ekanligini bildiradi Ya'ni noma'lumlaming biror x, = a_x, x, = = a,, qiymatlari (5.14) sistemaning

dastlabki /■ ta tenglamalarini qanoatlantirsa, u holda bu qiymatlar shu sistemanino qolgan barcha tenglamalarini ham qanoatlantiradi. Shuning uchun (5.14) sistemaning *r* i 1-tenglamasidan boshlab qolgan barcha *m-r* ta tenglamalarini tashlab yuborib berilgan tenglamalar sistemasiga teng kuchli

Vl + *12*2 + - + =

<1 6/7j "b ^22^*2 *u ^2 '*

(5.16)

sistemani hosil qilamiz.

(5.14) sistemani yechishda quyidagi ikki hoi bo'lishi mumkin: *r = n* va *r<n*. Agar *r = n* bo'lsa, u holda (5.16) sistemaning tenglamalari soni uning noma'lumlari soniga teng, shu bilan birga sistemaning asosiy determinant! A bo'lib shartga binoan u noldan farqli. Shuning uchun bu holda (5.16) sistema va u bilan birga unga teng kuchli (5.14) sistema ham yagona yechimga ega, ya'ni (5.14) sistema birgalikda. Agar *r < >1* bo'lsa (5.16) sistemaning tenglamalari soni uning noma' lumlari sonidan kam. и holda (5.16; sisiemani bunday yozamiz:

+ "$_I$2^{v}2 + + "b^T, =^{h}*l* ~ "j, .1 ^{v}, .. -

(5.17)

$+\ a_{r2}x_2 + ... + a,.\ ,.x_{l}. = b, - a,.\ ,.{}_{+1}x,.{}_{+I} - ... - a_m x_n.$

$x_{r+l},.\backslash_{r+2},...,x_n$ «ozod noma'lum»larga ixtiyoriy qiymatlar beramiz sistemaning va asosiy determinant! A*0 bo'lganligi sababli (5.17) sistemani y^e hib noma’lumlaming qiymatlarini topamiz. Shunday qildib bu holda (5.17) skKma'va u bilan birga unga teng kuchli (5.14) sistema ham cheksiz ko’p yechimlarga ega^b^lar ekaru^^g ma(rjtsasj л va s kengaytirilgan matritsalarning mnalari noma’lumlar soniga teng. ya’ni $r,$ = r„ = „ bo’lsa, u holda (5.14) sistema na yechimga agar bu matritsalarning ranglan o’zaro teng bo’lib, lekin noma'lumlarsonidan kichik,ya‘ni $r_A=r_H<n$ bo’lsa, u holda (5.14) sistema cheksiz ko’p yechimgalarga ega bo lar ekan. . .. D.

$_b$ -Qb =0 b = 0 bo’lganda (5.14) sistema **bir jinsli** sistema deb ataladi. Bir jinsli sistema uchun Л-/3 bo’lgani uchun r, = $r,,$ bo’ladi va u doimo birgalikda. Xulosaga binoan $r_t=n$ bo’lganda bir jinsli sistema yagona = 0, 0,,,,$x_{(J}$ = 0 ya‘ni nol yechimga ega.

5.1-teoremaga asoslanib bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi uchun qutidagi teoremaga ega bo’lamiz.

5.2-teorema. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi nolmas yechimlarga ega bo’lishi uchun sistemaning matritsasi A ning rangi noma‘lumlar soni n dan kichik bo’lishi zarur va yetarlidir.

Natija. Agar bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining tenglamalari soni ni nomaduinlari soni n dan kam bo’lsa, u holda sistema nolmas yechimlarga ega bo’ladi. Haqiqatdan ham, $r_(< m < n$.

Olingan natijalar tenglamalari soni noma’lumlari soniga teng chiziqli tenglamalar sistemasi uchun ham o’rinli ekanligini ta’kidlab o’tamiz.

Endi chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirishga doir misollar qaraymiz. **5-misol.** Ushbu

sistema birgalikda bo’lsa, uni yeching?

Vechish. Sistemaning matritsasi p 2

3

V^3 - 3 2

1 1

satrldan avnamiz.^ birinchi va ikkinchi satiiarini qo’shib to’rtinchi

A 2 -1) p
3 -1 1 3
3 1 3
10

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

satrl'a™"ʼ ʼʼʼaʼʼʼ,ʼaʼʼʼʼg birinchi satrl"nmg$_{ra}$oselementlari- . . ---------- i satrini (-3) ga ко paytirib ikkinchi va uchinchi ariga qo’shsak

<1 2 - P
Л~ 0 - 7 1
кО -5 4у

bo'ladi. Hosil bo'lgan ekvivalent matritsaning rangi *r* -3 chunki 2 -1
-7 4
-5 4

Demak, A matritsaning rangi ham |-7 4
3 ga teng; r_t = 3. Kengaytirilgan -5 4

р 2-1 2 '
12-3 2 2
3 1 18
0 -1 1 4j

matritsaning rangini hisoblaymiz. *A* matritsadagi singari alamashtirishlarni bajaramiz:

A 2-1 2 | *A* 2 -1 2 ' | *A* 2-1 2' | 'l 2 -1 2
3 -1 1 4 | 3-1 1 4 | | ^
B~ 3 1 1 8 | 3 -1 1 8 | 3 -1 1 4 | 0 -7 4 ~2
43 -1 I 1 | J) 0 0 o, | ^3-1 1 | -5 4 V

Oxirgi ekvivalent matritsaning rangi *r* =3 bo'lishi ravshan. Demak kengaytirilgan B matritsaning rangi ham 3 ga teng: *r,,* = 3.

Matritsalar bir xil ranglarga ega bo'lganligi uchun sistema birgalikda.

Bundan tashqari matritsalarning rangi noma'lumlarning soniga teng, shu sababli sistema birgina yechimga ega. AvO minor birinchi uchta tenglama koeffitsientlaridan tuzilgan, shu sababli to'rtinchi tenglama birinchi uchta tenglamalarning natijasidan iborat va uni tashlab yuborish mumkin.

Berilgan sistemaning birinchi uchta tenglamalaridan tuzilgan uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasini Kramer formulalaridan foydalanib yechib x, = 1,x_2 =2,x_3 =3 ni topamiz. Bu yechim berilgan sistemaning ham yechimi bo'ladi.

6- misol.

[2л; + 3x, + x, = 2,
I v.-s_v . i- 2л . 3.
!4xj + 6x, + 2x, = 0

sistema birgalikdami?

Yechish. Sistemaning matritsasi A ning rangini hisoblaymiz.

И f^1 ~^{5}
2 ~ 2 3
1^4 6 2 J ^4 6

$$\begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{matrix} \Bigg) \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$

-5 = 1 3^o. Kengaytirilgan B matritsaning rangini

9 chunki Г) 13

= z,

hisoblaymiz.

'2 3 13-3 -4 f0 13 -3 -4Л

1 "5 -5 2 3 -5 2 3

26 -6-12j 0 0 -4;

4

- 3, chunki

| 13 -3 -4 |
| -5 2 3 |
| 0 0 -4 |

=-4- |13 -3 / -5 2| =-4 (26-15) = 44 Г 0.

'II

bo’lgani uchun berilgan sistema emas.

/j *

7-misol.

sistema birgalikdami? . .

Yechish. A matritsaning rangim hisoblaymiz.

(2 3 -p p 3 46-2-00 p 3 [3

.3 -1 2j p "I -1

$r_s = 2$, chunki $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ = -11^0.

Kengaytirilgan B matritsaning rangini hisoblaymiz.

'2 3 -1 3^ (2 3 -1

4 6 -2 6 - 0 0

<3 -1 2 "b Ь -1

Demak $r_e = 2$.

Ci ~ = 2 bo’lgani uchun berilgan sistema birgalikda. Rang noma‘lum!ar

sonidan kichik bo’lgani uchun sistema cheksiz ko’p yechimlarga ega. Endi berilgan sistemani yechishga harakat qilamiz. Sistemaning ikkinchi tenglamasi uning birinchi tenglamasining natijasi bo’lganligi sababli uni tashlab yuborish mumkin. U holda berilgan sistema

(2x, + 3x, -x. = 3.

sistemaga teng kuchli bo'ladi. Bu sistemaning koeffitsientlardan tuzilgan oma lumlar

qatnashgan ifodalarni tenglikni chop qismida qoldirib x. va л\ noma‘lumlari oldidagi = qatnashgan 4 shaluvchilarni

tenglikning o’ng qismiga ko’chiramiz: minor Д = $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ -11540 bo’lgani uchun bu

(2x, +3x, =3 + x,, [3x,-x, = -l-2x,.

Bu sistemaning «Ozod noma‘lumi» x.ga aniq qiymat bersak, ikki ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo’lib uning asosiy .ЛОГПа A = -11*0 bo’lgani uchun u aniq ycchimga ega. Sistemani yechib eterrn›nar.’ qiymatiga mos x,, X, noma‘lumlaming qiymatlari topiladi. Shu jarayon'^ ^'1Г cttirib berilgan sistemaning boshqa yechimlarini ham topish mumkin '

^avon

’.

Masalan so’ngi sistemaga x, -• 0 qiymatni bersak u

f2.v, + 3x, =3,

(3x, -x, = -l

ko’rinishni oladi. Uni yechib x, =0, x, = 1 ni topamiz. Demak berilgan Slsternaning cheksiz ko’p yechimlaridan biri x, = 0; x, = 1, x, = 0 hosil qilindi.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

l.a) ■ 3 x - 2 *y* + 5 z = 11 , x + *y* - 2 *z* - 2, 2 x + 3 *y* = 3 . b) x + 2y-4z = 0, 3 x + y - 3 z = - 1, d) < 2x-y + 5z = 3.

chiziqli tenglamalar sistemasi Gauss usuli bilan yechilsin. Javob:
a) x-3,y=-1, z=0; b) x-0, y=2, z-1; d) *x=5, y=4*, z=-2.

x - *2 y* + 3z = 5, 2x - 4y - z = 8, 4x - 8y - 5z = 0

sistemalarning birgalikdaligi yoki aniqmasligi Gauss usuli yordamida tekshirilsin.
Javob: a) sistema aniqmas; b) sisitema birgalikda emas.

3.a) *2x+2y-z = 5,* 3x - *y* - *3z* - 9. x + 3y • 2z = 4. b) jx + 2v-z = 0, < 2x-3y + 2z = 11, [3x + y + z = 9.

sistemalar matritsa usuli yordamida yechilsin.

Javob: a) x 2,y-0, z=-1 b) x=3,y--l, z=l.

4. Har qanday chiziqli tenglamalar sistemasini matritsali yozish va yechish mumkinmi?

A) nomadumlari soni tenglamalari soniga teng har qanday sistemani

B) noma'lumlari tenglamalaridan ko’p sistemani

D) noma‘lumlari tenglamalaridan kam sistemani

E) asosiy determinant! noldan farqli istalgan noma‘lumlari soni tenglamaffl soniga teng chiziqli tenglamalar sistemasini

F) hech bir sistemani.

5. To’g’ri javob topilsin.

A) chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish noma lu Я ketma-ket yo’qotishga asoslangan Ja

B) sistemani Gauss usuli bilan yechganda ma‘lum odimdan keyin noma soni tenglamalari sonidan ortiq sistemaning hosil bo’lishi berilgan sistema ko’p yechimlarga ega ekanligini anglatadi

■ ^a‹‹SS ,Гта& vechganda ma'lum odhndan so’ng tenglamalar nam 41
teng|amat!\ f . bo,)ishi berilgan sistemaning yechimga ega D) sistenr ^di^ tadi Pa-
,rasida zB® an£P jar to S r °masligini'4av^^lanialar 4^^ GauSS usuli bilan yechishdan oldin uni

ei
E) barcha i p)
chiziq'gjega
yechimga
(2x-3y
6‘K + 4y
I- ? n
A) ecl
7 ? + 3V,
'■ [2x + 6?
A) ecl1=1*
4

ii t^jki ega emas'^i tekshirib ko’rishning hojati yo’q.
■ ~s//tenia neCkt Uimgacga?
"-7 ^egaCifias ^4heksiz k0'p yechimlarga ega D) 1 E) 2 F)3.
ГТМ^,,1етаПесЬч(сМт1ar8ae,,a?
r=4 fgacmas %eksiz ko’p yechimlarga ega
D) 1 E)2 F) 3.
2СЛ? isterTia neCh%chimlarga ega?
rx_2yl' ■
• |3x_6V c,1iaS ^eksiz ko’p D) 1 E)2 F)3
yechimlarga ega
’ A) Jmim^a fx+ y-F8, = \ si$temani4si usul bilan yechgan ma’qul?

' ' T-

9. 2. r - 3.У'rt_2 2
3л + 3y —9-ysuli k’Ian Kramer usuli bilan D) matritsa usuli bilan.
A)’ffiaUs^ (x-yКX-2г si$tenia,lM<(ysi usul bilan yechgan ma’qul?
10. <.r+K—-- 7* 6
[2x+1<Q;_^s ,AN 0) K»ner usu[j bilan D) matritsa usuli bilan.
A) Gauss feasuli kg ^Imalkg anor va 3 kg uzum uchun 2200 so’m, Shahrizoda
1 l.Agar ftjiohfll,|1kg -Ц anor va 2kg uzum uchun 1800 so’m, Zilola ham
o’sha narxrj bj]#n ^ImaJ kg anor va 1kg uzum uchun 2000 so’m sarflagan o’sha nar)|
va"jZumni1?narxini toping.
bo’lsa, oln B) ^00; Э;500 D) 500; 200; 300 E) 100; 200; 300 F) 200;
A) 200; 7
400, 600

tekshirish uchun savollar

1. Chiziq, ; _
2. Matrits “
3. Chiziq ’^alair

sodir c 1 J>
chilli tenglamalai sistemasini Gauss usuli bilan
i kda , jH*Jir Midi?
yechi xCta /4 scz*
Gauss *and^ 11 ,,Kr»*,,ier ‘oaп afzalligi nimada?
Sistem 1*sulin’^ usu>^* bihtyechishdan oldin uni ycchimi bor yoki yo’qligini
teksh ^ni
Chiziq|Hisb s ^alar" ^istenasini yechishning necha xil usulini bilasiz? Maktal 'i
tef^jkki ^onwmli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini vechi ' kufsi^acrxf1 uslfei
bilan tanishgansiz?
nalaiC s,sterasining matritsali yozilishi qanday?
2 мй 5 le,g3 ‘ma ^a^yechiladi?
3 Chizi t4?n, iala< s,steras>ni yechishning Gauss usuli nima?

4'A ' " a tetlS^i (e|11r1;";1п ;ir sistemasini Gauss usuli bilan vechganda nima

10.Ikki noma‘lumli ikkita va uch noma‘lumli uchta chiziqli tenglamala
5.

6.
7.

8.
9.

.... r sistemasinmg yagona yechimga egaligi, yechimga ega emasligi ’ cheksiz ko’p yechimlarga ega ekanligiga qanaqa geometrik izoh mumkin?..............................erish

6- ma‘ruza. Mavzu: Vektorlar va ular ustida amallar

Reja:

1 .Skalyar va vektor miqdorlar.
2. Vektor tushunchasi.
3. Vektorlar ustida chiziqli amallar.
4.Ikki vektor orasidagi burchak tushunchasi.
5. Vektorning o’qqa proeksiyasi va uning xossalari.
6. Vektorni koordinata o’qlaridagi tashkil ctuvchilari bo’yicha yoyish ■
7. Koordinatalari orqali berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar
8. Vektorning uzunligi.
9. Fazodagi ikki nuqta orasidagi rnasofa.
10. Fazodagi kesmani berilgan nisbatda bo’lish.

Adabiyotlar; 3,5,8,11,15,16

Tayanch iboralar; skalyar miqdor, vektor miqdor, vektor, bazis, ort, kollinearlik, komplanarlik.

6.1.Skalyar va vektor miqdorlar

Kundalik hayotimiz.da: instituting eng keksa o’qituvchisining yost ncchada?; ma‘lum quduqdan bir kecha-kunduzda qancha neft olinadi?; fakulte talabalari bir kunda qancha paxta teradi?; Bobomurod traktorchi bir kunda qand yer haydaydi?; korxona bir kunda necha metr mato ishlab chiqardi?; xonada. havoning harorati qanday?; bir dona to’la ochilgan paxta ko’sagining massas qancha?; ishchi bir kunda qancha g’isht terdi?; zavod bir kecha-kunduzda qanch. neftni qayta ishlaydi? kabi savollarga duch kelamiz. Bu savollarning barchasig bitta aniq son yordamida to’liq javob olish mumkin. Boshqacha aytganda bu yerc. miqdor o’zining faqatgina son qiymati bilan to’la aniqlanadi.

O’zining son qiymati bilan to’liq aniqlanadigan miqdorlar **skalyar** miqdor- deyiladi.

Uzunlik, yuza, hajm va harorat skalyar miqdorga misol bo'la oladi. Shund^ miqdorlar ham uchraydiki, ularni faqatgina son qiymati orqali to’liq aniq bo’lmaydi. Masalan: Qarshi shahridan 70kin/soat tezlik bilan chiqqan avtotw bir soatdan keyin qaerda bo ladi? degan savolga birgina 70 kin/soat yor . javob berib bo’lmaydi. Agarda rnasalaning shartiga yo’nalish tayinlansa, etish mumkin. Ya’ni Qarshi shahridan 70 km/soat tezlik bilan Qarshi-SantfM yo'nalishi bo’yicha harakatlanayotgan avtomobil bir soatdan keyin qaerda 1 deyilsa, bu savolga to’liq javob berish mumkin. зЯ

Son qiymatidan tashqari ma‘lum yo’nalishga ega bo’lgan miqdor ■ **miqdorlar** deyiladi.

Harakat tezligi, tezlanish, kuch, magnit va elektr may!■ kuchlanganligi кдЫ kattal iklar vektor miqdorga misol bo’ladi.

6 2 Vektor tushunchasi

I' ,, ..,, (miado rt ik vektor ko'rinishida tasv.rlanadi.

Vektor kattali (i_e sma **vektor** deyiladi.

bta'rif. Yo'nalgan kesma **v** д R bo,|gan vcktOrn,

Boshlanish (bosltl ran vektorni bina harf bilan d (yoki

5S <y b k Xilanad. yo A S va q B nuqtala® orasidagi masofa *AB* vektorning uzunligi деУ"а^

vektorning uzunligini uning **moduli** ham deb yuritiladi va И кО Г'"77 1 b oxИ a ь 1 1ап

\AB\

ustma-ust tushgan vektor **nol vektor** deb ataladi va 5 (yoki (I) bilan belgilanadi.

Demak, Zi=6-nol vektor. Nol vektorning modul. 0 ga teng -"^or^ektorga^'ma^qarshi vektor deyiladi. 5 vektorga qarama-qarshi **B ttor k**- kabi belgilanadi Uzunligi I ga teng vektor birlik vektor deyiladi va o vekmrga mos (u bilan bir o'qda yotgan hamda bir xil yo'nahshga ega) birhk vektor 5° kabi belgilanadi. -

2-ta'rif. Bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi *a* va *b* vektorlar **kollinear** vektorlar deyiladi (18'-chizma).

a.

Ъ

a =T *a* — -~*Ъ*

18-chizma.

3- ta'rif. Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar **komplanar vektorlar deb** aytiladi.

4- ta'rif. Kollincar *a* va *b* vektorlar bir xil yo'nalgan hamda bir xil uzunlikka ega bo'lsa, teng deyiladi *(a-b* kabi yoziladi) (18 b-chizma).

Ta'rifga binoan berilgan vektorni o'zo'ziga parallel ko'chirish natijasida unga teng vektor hosil bo'ladi. Boshqacha aytganda vektorni uzunligi va yo nalishini o'zgartirmagan holda uni fazoning bir nuqtasidan boshqa bir nuqtasiga кo chirish mumkin ekan. Bunday vektorlar erkin vektorlar deyiladi. Biz faqatgina erkin vektorlar bilan ish ko'ramiz.

6.3. Vektorlar ustida chiziqli amallar

Matcmaiikada vektor tushunchasi son tushunchasiga nisbatan murakkab S 5|Uncia Sonlar ustida bajariladigan barcha amallarni vektorlar ustida bajarib amalh? ' 'J a salan кo paytirish, bo'lish. darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish kabi amallam, vektorlar ustida bajarish mumkin emas.

vektori **arnTc^T USt?^a ctl,z*4,i amallar** deb, vektorlarni qo'shish. ayirish hamda vektorlarni songa ko'paytirish amallariga aytiladi.

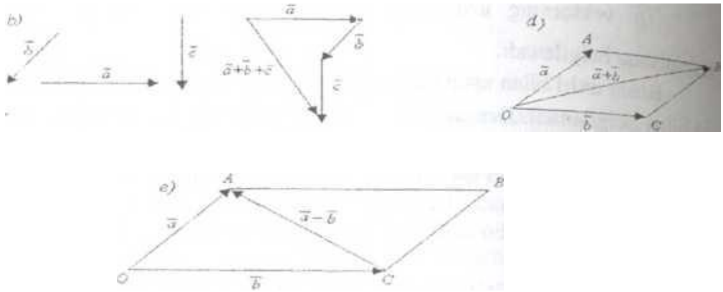
Ixtiyoriy n n q° Sh—^o'^an ^arc1" ikkita *a* va *b* vektorlarni olamiz.

vektorni qo'ylmi' Iki 0A, o V !ktOrni y asa ymiz, so'ngra A nuqtaga 717?

1 a *a* va *b* vektorlarning yig'indisi *d* + *b* deb birinchi

qo’shiluvchi *a* vektorning boshini ikkinchi qo’shiluvchi *Ъ* vekt tutashtiruvchi *OB* vektorga aytiladi. (1 9[a]-chizma). Vektorlarni i usuli **uchburchak usuli** deyiladi.

A



19-chizma.

Uchta a, *b* va *c* vektorlarning yig’indisi *a+b+c* deb birinchi qo’shiluvchi vektorni oxiriga ikkinchi qo’shiluvchi *b* vektorni boshini qo’yib, so’ngra ikkinc qo’shiluvchi vektorning oxiriga uchinchi *c* qo’shiluvchi vektorning boshini qo birinchi *a* vektorning boshi bilan uchinchi *c* vektorning oxirini tutashtiri natijasida hosil bo’lgan vektorga aytiladi (1‘/-chizma).

Vektorlarni bu xilda qo’shish qo’shiluvchilar soni har qanday bo’lganda b yaroqlidir.

Endi vektorlarni qo’shishning boshqa bir usuli bilan tanishamiz. *OA=a OC~b* vektorlarni yig’indisini topish uchun bu vektorlarni tomon hisoblabOAF parallelogramm yasaymiz. Parallelogrammning O uchidan o’tkazilgan diagor.i *OB* vektor, *a* va *b* vektorlarni yig’indisini ifodalaydi. Vektorlarni bundayqosh usuli parallelogramm qoidasi deb ataladi (19[d]-chizma).

2. Vektorlarni ayirish. *a* va *b* vektorlarni ayirmasi *a-b* deb *b* vektorb yig’indisi *a* vektorni beradigan *c* vektorga aytiladi. Demak *a-b* ayirmani top uchun *a* vektor bilan *b* vektorga qarama-qarshi -*b* vektorni yig’indisi[11]' lozim ekan. *OA~a* va *OC* - *b* vektorlarni ayirmasini topish uchun bu v∧t0.)£J. tomon hisoblab. yasalgan *OABC* parallelogrammning *C* uchidan o diagonali *C.i* vektorni topish lozim. Ayirma vektorda yo’nalish «ayг'НЯ dan «kamayuvchi» ga qarab yo’naladi(19[e]-chizma).

3. Vektorni songa ko’paytirish. Noldan farqli *a* vektorning tn ko’paytmasi deb. *a* vektorga kollinear, uzunligi ga teng bo = bo’lganda *ci* vektor bilan bir xil yo’nalgan, m < 0 bo’lganda esa qarshi yo’nalgan hamda mo bilan belgilanadigan vektorga aytiladi(- Я

3CZ - -2.d --- --------- CL <2 —► -И ----------- --

-- ------------- p

*H 20-chizma —0

,, • ———————— ■ •

2. *a* vektorlar uchun shunday yagona Л son mavjud | tenghk o nn^ boj vektor|arnj

va *b* (6^0) kolhnear bo'lib 5=H kollinearligidan 5"=± *b* ' ekanligi

- -

Haqiqatan, *a*-\|*a*\|-*a* , *b* ± • |*a* / *b*| *b* yoki + |*a* / *b*| = Л belgilashni kiritsak

2 *Ь* hosil bo ladi.

'shunday qilib vektorlarni qo'shish. ayirish . . hamda vektorni songa ko'paytirish natijasida vektor hosil bo'lar ekan.

Vektorlar ustida chiziqli amallar **quyidagi xossalarga ega**

! *a* + *b*=*b* + 5 (21 "-chizma);

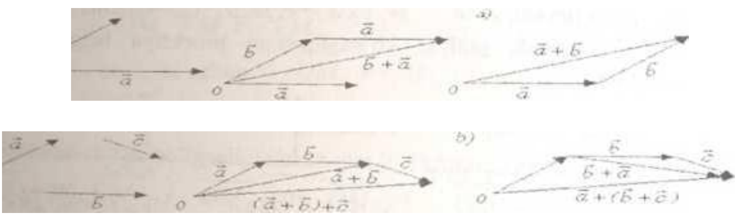
2. (*a*+*b*)+c=5+ (*b* +5) (21^A-chizma);

3. /71(5+6)=/7?5+ *mb* .

4. 5+0=5;

kelib chiqadi. U holda 5-±|a|б(' =

5. 5+(-5)=0;
6. 5 1 = 5;
7. (/» i /7) -5 = *mci*+*na*, *m* va *n* haqiqiy sonlar;
8. (/77/1) -5= /77 (/75)=/7 (1715).



21 -chizma.

p J - **vektor orasidagi burchak tushunchasi**

Q.--- - '3 'ektor*ar berilgan bo lsin. Fazoda ixtiyoriy 0 nuqtani olib ' ava ^=* vektorlarni yasaymiz.

birini ikkinchisi^a Hlan L1<tOrlar Ora51<^^a 8'burchak deb *OA* va *OB* vektorlardan (0<9><-д-)к| h LL us ma›ust tushishi uchun burilishi lozim bo'lgan (*p*) burchakka aytiladi.

$\vec{a}$ vektor bilan ℓ o'q orasidagi burchak deganda $\vec{a}$ vektor bilan ℓ o'q… joylashgan va u bilan bir xil yo'nalgan $\vec{\ell}^{\,0}$ birlik vektor orasidagi burcha… tushiniladi. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak ($\vec{a}\wedge\vec{b}$) kabi belgilanadi.

6.5. Vektorning o'qqa proeksiyasi va uning xossalari

Fazoda C o'q va *AB* vektor berilgan bo'lsin. *A* va *в* nuntai J …dan bu o'q… perpendikulyar tushirib perpendikulyarning asoslarini mos ravishda A_1 va B_1 orqa… belgilaymiz. $\overline{A_1B_1}$ vektor $\overline{AB}$ vektorning ℓ o'qdagi **tashkil etuvchisi** yo… **komponenti** deb ataladi (22-chizma). ℓ_1 va ℓ_2 sonlar A_1 va B_1 nuqtal… o'qdagi koordinatalari bo'lsin.

6-ta'rif. e_2-G ayirma *AB* vektorning (o'qqa proeksiyasi debataha;U

$\overline{AB}$ vektorning ℓ o'qqa proeksiyasi $pr_\ell \overline{AB}$ kabi belgilanadi. Shunday qilib $\overline{AB}$ vektorning ℓ o'qqa proeksiyasi deb vektorning boshi A va oxiri B nuqtalarning o'qdagi proeksiyalari A_1 va B_1 nuqtalar orasidagi masafoga aytilar ekan. Bu masofa vektor bilan o'qning yo'nalishi mos tushganda «+» ishora bilan aks hold… «-» ishora bilan olinadi. Proeksiyani ta'rifidan $\overline{AB}$ vektor o'qqa perpendikulya… bo'lganda uning o'qqa proeksiyasi nolga teng bo'lishi kelib chiqadi. (22- chizma)

Proeksiyaning asosiy xossalarini keltiramiz:

1. *a* vektorning (o'qqa proeksiyasi *a* vektor uzunligini bu vektor bilan o'o orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng, ya'ni *pr,a=\a\cos<p* Въ 23"-chizmadan ko'rinib turibdi.
2. Ikki vektor yig'indisining o'qqa proeksiyasi qo'shiluvchi vektorlarning shu o'qqa proeksiyalari yig'indisiga teng, yani *pr, (a+b)= pr, a + pr,b .*

Bu 23^b-chizmadan ko'rinib turibdi.

3. Vektor *a* ni Л songa ko'paytirganda uning o'qqa proeksiyasi ham shi songa ko'payadi, ya'ni *pr,* (A d)"Z. *pr, ci* (23^d-chizma).

Boshqacha aytganda skalyar ko'paytuvchini proeksiya belgisidan chiqaris mumkin ekan.

G-f $P^r t$ *AB~Q,*

22-chizma.

b)

<2

Г"

23-chizma.

o’qdagi tashkil etuvehi A_1B_1 vektorni proeksiya

Endi $\overrightarrow{AB}$ vektorning ℓ o’qdagi tashkil etuvchi $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektorni proeksiya orqali ifolalaymiz. $\overrightarrow{\ell^0}$ vektor ℓ o’qqa mos birlik vektor bo’lsin. U holda

$$\overrightarrow{A_1B_1} = pr_\ell \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\ell^0} \quad (6.1)$$

bo’lishi ravshan.

Izoh. Vektorning boshqa vektor yo’nalishiga proeksiyasi ham xuddi vektorning o’qqa proeksiyasi kabi aniqlanadi.

6.6. Vektorni koordinata o’qlaridagi tashkil etuvchilari bo’yicha yoyish

Oxyz fazoda to’g’ri burchakli koordinatalar sistemasini olaylik. O’qlarning har birida boshi koordinatalar boshida bo’lib yo’nalishi o’qning musbat yo’nalishi bilan ustma-ust tushadigan birlik vektorlarni olamiz va ularni /../,* lar orqali belgilaymiz. Bu yerdagi I Ox o’qqa mos, *JOy* o’qqa mos va * 0- o’qqa mos birlik vektorlar. Demak i'j'J birlik vektorlar o’zaro perpendikulyar va nokomplanar.

7- **ta’rif. Uchta** *i J Jc* vektorlar sistemasi dekartning to’g’ri burchakli bazisi yoki ortlar deb ataladi.

a fazodagi ixtiyoriy vektor bo’lsin. Shu vektorni *i ,j ~k* ortlar orqali ifodalash mumkinmi? Agar mumkin bo'lsa u ifodani qanday topish mumkin? degan savollarga javob topishga harakat qilamiz.

a vektorni o’z-o’ziga parallel ko’chirib uning boshini koordinatalar boshiga joylashtiramiz. *a=OM* vektorning oxiri *M* nuqtadan koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar o’tkazamiz. Natijada diagonallaridan biri *OM* vektordan iborat

$$\overrightarrow{OM_1} = pr_{0x}\overrightarrow{OM} \cdot \vec{i}, \quad \overrightarrow{OM_2} = pr_{0y}\overrightarrow{OM} \cdot \vec{j}, \quad \overrightarrow{OM_3} = pr_{0z}\overrightarrow{OM} \cdot \vec{k} \quad (6.3)$$

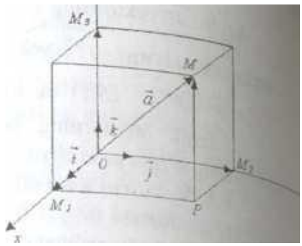
bo’ladi.

va OM_i

$\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ vektorning 0x, 0y, 0z o’qlardagi proeksiyalarini mos ravishda a_x, ... lar orqali belgilasak (6.2) va (6.3) formulalarga asoslanib

vchilari

parallelepipedga ega bo'lamiz. 24-chizmadan vektorlarni qo'shish qoidasiga **binoan** a~$OM_{\{}+M_xP + PM$ ga ega bo'lamiz. M_yP~OM_2, Shunday qilib fazodagi istalgan *a* vektorni yagona usul bilan dekart bazisi *i ,j ,~k* orqali (6.4) ko'rinishda ifodalash mumkin ekan. (6.4) *a* vektorni uning koordinatalar o'qlaridagi tashkil etuvchilari orqali yoyilmasidir. Bu yoyiimani har xil qo'llanmalarda har xil nomlar bilan yuritiladi.



24-chizrna.

Masalan uni vektorni ortlar, dekart bazisi, Vek,Orni Proefai^ koordinatalari orqali yoyilmasi deb ham yuritiladi.

Faraz qilayiik vektorning oxiri AY nuqta *x,y,z* koordinatalarg a bo'lsj. holda *a-OM* vektorning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari $a_x=x, a_y=y$

bo'lib (6.4) yoyilma a=xZ+x/'+zA (6.5)

ko'rinishga ega bo'ladi. Vektorning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari ' ' koordinatalari deb ham ataladi. O'qlardagi proeksiyalari a_x, a_y, a g_a Л vektorni $a\{a_x, a_y, a_z\}$ yoki $5=\{a_v; a_y, a_:\}$ ko'rinishda yozamiz &

a_x - *a* vektorning abssissasi, a_y- ordinatasi, $a_:$ - applikatasi deb ataladi

Shunday qilib boshi koordinatalar boshida bo'lgan *a-OM* $_{ve}$^$_{or}$. uni oxiri AY nuqta bir xil koordinatalarga ega bo'lar ekan.

C*AY vektor AYnuqtaning radius-vektori deyiladi.

Izoh: Bundan buyon vektor berilgan yoki vektor topilsin deyila vektorning koordinatalari berilganligini yoki vektorni koordinatalarini i: lozimligini tushuniladi.

6.7. Koordinatalari orqali berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar Agar vektorlarning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari (vektorning koordinata malum bo'lsa, u holda bu vektorlar ustidagi qo'shish, ayirish va vektorni я ko'paytirishi amallarini ularning proeksiyalari ustidagi arifmetik amallar almashtirish mumkin.

Vektorlar a $=a_x\ i + a_y j + a_z\ \kappa$, $b = b_x\ i + b_y j + b_z \sim k$ yoyi Imalari ~ У^ог^

berilgan bo'lsin. U holda d 1 л $b_x)i$ л ci - $Xcij/.a$- $'k$, ya'ni vektorlarni qo'shganda (ayirganda) koordinatalari qo'shiladi (ayiriladi). vektorni songa ko'paytitganda *| koordinatalari shu songa ko'paytiriladi.

1- **misol.** 5=2/+37-2к, =3 / -/+4k vektorlar berilgan- . p|агп!^г^-

yig'indisi va ayirmasi topilsin.

Yechish. Vektorlarning mos koordinatalarini qo'shib

$$7+6 =(2+3)\ 7\ t\ (3-1)./ +(-2+4) * =5\ Z +27+2\kappa$$

koordinatalarini ayirib 5-*=(2-3V

vektorga va mos

~k vektorga ega bo'lamiz. .4«o'pj,p

./+47-6* v'-

2=21+57-34 vektor 4 ga ко ,, ir , (tjrjb Ochish Vektorning har bir

2- misol.

koordinatalar,n. -

45=8;+20/-l2* vektorni hosil qilamiz.

.fizuidgi

6.8. Vektorning uzunl»

. asi ytri^gciigan bo'lib uning

Fazoda vektor $a=a_xi \sim a_yj+a_zk$ yoyi masi yo Q_{ara}^ h_0|da (24-chizma) uzunligi P ni topish talab ettls.n, Qarala, vektor qirralari shu vektorning koordinata r

lainata>)4|.gi tashkil etuvchilari

<9W. ,OM_2 va kvadratlarining yig'indisiga teng bo lishi ma lum. Sir j^2 =pA/,$|^2$ +|OW_2|·

• , • /edriii№-||aridan biri ekanligi = va

+$pM_3|^2$, yoki $OM_\text{л}$|= it7_.i bo'lgani uchun |<5| = $<7^2$ + fl' + a.JI formulasi — $Ja\sim + a\sim + a\sim$

edi. To'gM bcuehakh

(6.6) ni hosil qilais

i |олл' i°'

f^2 bundd ■*>иП<^1Йгп* uzunligini topish

=

|<9A7

JI «qilaiiu

3-misol. $a=6ii+3j-2k$ vektorni uzunligi topill [1]

Yechish. Misolda $a_x=6$, <7.-3, a—2 bo'> iun (6.6) formulaga binoan |ri| - ^6* + 3^2 + $(-2)^2$ =п/36 + 9 + 4 ~7 bo'ladS0 ,ac

Izoh. a vektor Oxy tekislikda qaralsa bu holda b old-л ning applikatasi nolga teng bo'lganligi sababli vektor 5= $a_xi + a_yj$ yoyilmr^' inwtamda uning uzunligi kabi topiladi. i, j birlik vektorlari tek> tr,, le, Jekart bazisini tashkil etadi. a_x- abssissaga va a_y - ordinataga ega bo'lgan Igan .jmi <i{<7_v, <z_v} yoki a_y} kabi yoziladi.

Endi vektorlar nazariyasidan foydalanib analitik georw geoiT'.mg ba'zi masalalarini йМЙйаиаду»»-»

g I j 6.9.Fazodagi ikki nuqta orasidat^^idagiffi^

■ j i, .J, oxiri <3 (.vg j.-2; nuqt; ifiiKpJ-"'lgan .ПЗ vektorni ymiz. Vektorning o'qqa proeksiyasining ta7ififf;La'rifgJt P^2,,хТв^ x_r x . P^2<nЛB~y^-y P^~лЪ~- им

- "2'-' bo Iganhgi sababli (б.о-lli (6.1p®an

AB =(*;- x,) Z +(y_2- J_Y) /+(-2·ZI J g jj .

formulaga ega bo'lamiz. Demak boshi *A* (x_t; y_t; r,) nuqtada

—H ' oxirj *o* 1 nuqtada bo'lgan *AB* vektorni koordinatalarini topish uchun I koordinatalaridan boshini mos koordinatalarini ayirish lozim ekai Un'nS °X' binoan vektorning uzunligi l-4Z?| = y (x_2 - $x_($)^2 + (y_2 - y,

2 2‹7 (6 »i

formula yordamida topiladi. Ana shu formula *A* va *B* nuqtalar Я aniqlaydi.

4-misol. A (4; 3; 2) va B(1; -1 ;2) nuqtalar orasidagi masofa - I

Yechish. Misolda xq-4, =3, Z]=2 x_2=l,y_2=-y z_2=2 {6 8) p°^'S'n

d-AB 7(1-77+7-1 -3)^7 + (2 -21^7 = V9 + Гб =5 bo'ladi.

6.10. Fazodagi kesmani berilgan nisbatda bo'Iish Fazoda *A* (xq; y,; z,) va *B* (x_2; y_2; z_2) nuqtalar berilgan bo'lsin qg 2>0 nisbatda bo'luvchi *M(x,y,z}* nuqtani topish taiab etilsin, ya'ni *AB AM:MB=A* munosabatni qanoatlantiruvchi *M* nuqtani topish taiab «9 holda *AM* va *MB* vektorlar kollinear bo'lib *AM:MB~A* yoki/14/=^^.

uchun *AM -A MB* bo'ladi. (6.7) formulaga binoan *AM =(x-x\)'i Ay.y y z})k, MB ={x2-x)i+{y2-y)j+{z2-z)k,* bo'lgani uchun, hamda vektorni $ ko'paytirganda uning barcha koordinatalari shu songa ko'payishini hisobga *AM ^A MB* tenglikni

(x-x,)z +(y-y]).l+(z-zl)A:=l(x_2-x)Z +Л(y_2-y)7+л(2_2<) *к* ko'rinishida yozamiz. Bundan teng vektorlarni mos koordinatalari ham bo'lishni hisobga olib x-X|=л(x_2-x), *y-yi=Л{y2-y), z-Z\=A(z2-z)* tengliklarni qilamiz.

x-X|-2 (x_2-x) chiziqli tenglamani yechib *x* ni topamiz. *x-X\=Ax2-Ax,* x+Яx'" x. + 2.x,

(1 + Л)л~X | + Л X; . x - —-—— .

I 4- л

Shuningdek y - к ıг/-' y - formulalarga ega bo'lamiz.

1 4 Л I 4- Л

Shunday qilib *AB* kesmani z>0 nisbatda bo'luvchi Л/ nU

v, b/v

. v (6.9) formulalar yordi

koordinatalari I +• /t ii/l I + *A*

topilar ekan. Xususiy holda AB ab etilganda zy koordinatalarini

kesmaning o'rtasini topish tai

(6.9) dan *AB* kesmani teng ikkiga bo'luvchi nuqtaning

X, +x,

$$\frac{z_1+z_2}{2} \quad (6.10)$$

formulalarni

uchun x = —- —,

hosil qilamiz.

5- iTiiso

l- fvfisolda Xi л .....

nisbatda 4 15 e »i^=-- = 6 bo'ladi. Izlanayotgan

ioylashgan A._ , Z" 3 3

Yechish- тм q4 myor^ida2_5nisbat<lab O,lina t

(6.9)ga binoan ' lum bo'lsa S nuqtani topmg ?

-Л Г--8 v=2 5=3 bo'lib Л'2.^3 va -2 larnl

6-П1 va

c=(8;2;3) nuqtalar ma

' **Yechish.** MisoM>quyib noma'lumlarni aniqlaymiz: topish talab etiladi. (6.9) gateg. Я

^7^^^ v (,

3 + 2,5^ 8-3,5=3+2,5x2, *i , 3,5

1+2,5 '

4+2,5-;, T = 3 _jfcl = 2,6.

3 = - -------- • "2 ?5

3,5 4 ъ . „ц; o? 1 o (T 2 6) nuqta bo'lar ekan.

SyA3A-7)mv“«-5; 3; -I) nuqtalar berilgan. *AB* kesmani o'rtasi *C* "Uq'a **Yechish.** *C*

nuqtaning koordinatalarini л. y. z orqali belgilasak ular (6.10) 3—5 _ . __ _ 9 *3 _ *6 m*

— — - = —4

formulalar yordamida aniqlanadi. x = —--~ , -v_ 2 ' 2

Demak C(-l;6;4) nuqta *AB* kesmani o'rtasi ekan.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savoilari

1. Boshi Л(3;2;-1) oxiri B(2;-4;3) nuqtada bo'lgan ЛЙ vektorning koordinata o'qlariga proeksiyalari hamda tashkil etuvchilari topilsin.

Javob: PЬ;ЙB=-1, *pг0y~AB=-6, P^._7в=A, -i,-6j,4k* -tashkil eluvchilar.

2. 5=2/-/+3A-, *b=-j+k* bo'lsa *a + b* topilsin. Javob: 5 1 *b* = {2.-2,4],*ci-b*-{2,0,2}.

3. *a---i-2j+3k* bo'lsa 55 topilsin. Javob: 55={5;-10; 15}.

4. 5—2/+3/-6Д vektorning uzunligi topilsin. Javob: 1й|=7.

5. Boshi .1(5:7,9) oxiri #(2;4;3) nuqtalarda bo'lgan vektorning uzunligi topilsin .' Javob: ijfi|=3j6. 7

7 4(3- 2~l\Va nu4talar orasidagi rnasofa topilsin. Javob: 1/У5 uz birl.

nuatatnn i ■ 4a. ^4,5,-3) nuqtalar berilgan. *AB* kesmani 2:3 nisbatda bo'luvchi S , S Javob: C (3.4; 0,8:-0,2).

medianahrin- ' ' '~'3) va C(0;3) nuqtalarda bo'lgan uchburchak

ahalanmng uzunligi topilsin. Javob: TH; <Го |

‘smj nu felar
nu felar-na4/ nuqta пя ч,, y or <amida 3;2 nisbatda bo’linadi Л(-3;5;7) va C(2;3;4) К;Л (42:0^ bo ,Sa, 6

nilcltani ^ping. Javob: *B*

9 l;3^/a 2?(5,4, 2) fiuqtalaf berilgan. *AB* kesmani o’rtasi *C* nuqta topilsin.

a= V3;2J)-

^din^talgj va ^“K-4;2) vektorlar berilgan. *c = 2a + 3b* vektorning A)^i toping.

'* A Sr Й!** B) O) (-8;6;9) E) (-6;4;«) F) (3;-3;5).

A hV3 166> ' 20 va |a-б| = 18 bo’lsa, p

0)14 E)ls F)16.

It ktoriar o ZiLr,, '* burchak tashkil etadi. Agar |o| topilsin.

? blang, A » 2/7 в) 77 D) 7 E) 7/7

A){4

to. Ab.. -1, pl = 3 bo’lsa,

^blang. A > 2 V? B) J7 D) 7 E) 7^7 F) 6.

j\12} vektorga | 4 .12 qaramQ_q ars hi yo’nalgan birlik vektorni ko’rsating.

<. ^I3, I- 3

>r >

...., b мш d) НФ1} r) им} p) ,o;o;

-ч|

MlogT^ Л 43;4; 1} va *BD{-2*-4;1} bo’lsa ABCD

*2 p 1f,1ffl ^ C uthini k.Q orc iinatalarining yig’indisini toping. f6.x Aing B)7 D) 13

A E;)16) x^ anday 4‘ p)9 y m «tlariga 7/ - {x;9;2} vektorning uzunligi 11

2. , gateng bo’ladi. ' B)V = 6 D)A-4 6 E)x = -6 F)x = 8.

3- QaJ rni ma?

! SkaL 9 z*o’z bii tekshirish uchun savoilar

5. 2- Ve^va vektor httalik larnima?

QaL' rnii,,a -

Ve^ay vektorlar Itoijine^ komplanar , term va qarama-qarshi deb ataladi? Ve^ming modulj nima?

~

n<; lga (A>r,ai ustidagj qaysi ата ц ar chiziqli amallar deb ataladi va ular qanda\

6. yJminladi?

■ ■ V^orn;n j = o qqa proeksiyasi nima va u qanday xossalarga ega?

8- D^rmng 0 qd^gj tashku etuvchjsi njma?

9. N(-art bazisi (on } nima> Ш

10 V>ningradiut vekt ^ in|ma? «

I V’’ou 1 'ngkoor ei,,a,alftrinnra? Ж

1 4' " 017 lr 0f 1 *a" Я ar May ifodalanadi? АЯ

'> qaii|^',9 |natalai1 Vordaniida berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar q a 1«

P^orп'п .§ azu hligi qanday topiladi?

' nuqta or asidagi masofa qaanday topiladi? .

c a esmam berilgan nisbatda bo’luvchi nuqta qanday topiladi-

7- **<u>ma‘ruza.</u> Mavzu: Vektorning yo’nalishi. Skalyar ko’paytma Reja:**

1. Vektorning yo’naltiruvchi kosinuslari.
2. Ikki vektorning kollinearlik sharti.
3. Skalyar ko’paytma tushunchasiga olib keluvehi ish haqidagi masala.
4. Skalyar ko’paytma.
5. Skalyar ko’paytmaning xossalari.
6. Skalyar ko’paytmani vektorlarning koordinatalari orqali ifodalash.
7. Ikki vektor orasidagi burchak.
8. Ikki vektorning perpendikulyarlik sharti.

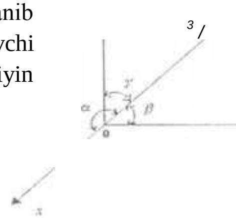
Adabiyotlar: 3,5.7,11,15,16

Tayanch iboralar: yo’naltiruvchi kosinus', .skalyar ko’paytma, skalya^ kvadrat, perpendikulyarlik, parallellik

7,1. Vektorning yo’naltiruvchi kosinuslari

Fazoda vektorning holati uni koordinata o’qlari bilan tashkil qilgan *a,p,^* burchaklar bilan aniqlanadi.

Bu burchaklarning kosinuslari vektorning **yo’naltiruvchi kosinuslari** deb ataladi. Vektorning o’qqa proeksiyasi uning uzunligi bilan vektor va o’q orasidagi burchak kosinusining ko’paytmasiga tengligiga asoslanib berilgan $a=a_x i\ +a_y j+a_z k$ vektorning yo’naltiruvchi kosinuslarini topish uchun formulalar chiqarish qiyin emas.



a_x~ p| cos *a*, a_y~pj cos/?, a_z=|^| cosy

cos *a* = pq-, cos *P* - pr , cos / = prr
Id id d

25—chizma.

munosabatlardan

tengliklarga ega bo’lamiz. p| = + *a* + *ci*^{1}. ekanini hisobga olsak bu tenglik!^

a.

ko’rinishni oladi.

cos *a* -

(7 П Y^{e}k*^{orn}ing yo’naltiruvchi kosinuslari orasida bog’lanish o’rnatish uchu I ning atelia tengliklarini kvadratga ko’tarib hadma-had qo’shamiz. U holda " ^{COs2}a + cos^2/? + cos^{2}y =

-Й + _ "J

2 , ^{a}.v^{+a}v$^+$«- «J +Д^2. +^{Я}- + +O-

= *

bo'ladi. Demak istalgan vektorni yo'naltiruvchi knc- yig'indisi birga teng ekan, ya'ni cos *a* + cos'/? + $\cos^2$ v-i

-o Л~Ч7.1')

1- izoh. Har qanday *a* birlik vektorni koordinata ' lining yo'naltiruvchi kosinuslariga teng bo'lganligi uchun uni

a =cos *a* ■ *i* +cos /?•./+ cos / • *k*

ko'rinishida tasvirlash mumkin.

2- izoh. *Oxy* tekislikdagi vektor uchun 90°, a + /j-₉ d bo'lganligi uchun (7.1') tenglik $\cos^2$ a + $\cos^2$/? = 1 ma'lumayni ■

1- misol. /1(-2;1;3) va £(0;-l;2) nuqtalar berilgan *7B* vektor"^I o'qlari bilan tashkil%• etgan burchaklarni kosinuslari topilsin? rninS koo r(i;r

Yechish. *AB* vektorning Ox, Oy, Os o'qlarga proeksiyalarini J =0-(-2)=2, pr_{Oy} *7в* =-1 -1 =-2, $pr_{0:}$ *TB* =2-3^-°РаП1*г- (6.8) formuladan foydalanib vektorning uzunliginj

Я-2)˙ 1)' V (7.1) formuladan foydalanib vektorning yo naltin,. i

ii

2 2 1 kosinuslarini aniqlaymiz: cos« J , cos//

---,cos/=--.

2- misoI. J (2;-l;5) nuqtaga R=11 kuch qo'yilgan. Bu kuchnin» ь J etuvchilari x=7, y=6 ekanini bilgan holda kuchning yo'nalishi hamda shu kucH vektorning oxirini *B(x;y;z)* orJ a.v⁼ *P"ttJC A B* =x-2=7, a_y= pr_{Ot} *TB* =y |-

tasvirlovchi vektorning oxiri topilsin.

Yechish. Kuchning tasvirlovchi belgilasak shartga ko'ra p|=Л/Я=Ц, bo'ladi. $a\sim_v + a^2_v$ + cC=|я| munosabatdan

<7- ni aniqlaymiz 7^2+6˙+«>' ' tf.^{2}=121-85=36; <6 =±6. (7.1) ga ko'ra cosa=—, cos/?=—, cos/==—bola;

7 li 11 1

Endi *B* nuqtaning koordinatalari x, *y*, *z* larni aniqlaymiz. *B* nuqta' •

koordinatalaridan *A* nuqtaning mos koordinatalarini ayirsak *a-AB* vektomiM koordinatalari kelib chiqadi, ya'ni x-2 7, y' 1 -=6, s-5=±6.

Bundan x'-9, y=5. ~i-ll, z_2=-l kelib chiqadi.

Shunday qilib berilgan kuchni tasvirlovchi vektorning oxiri /?i(9, 5,11) Z?$_2$(9; 5;-l) nuqtada bo'lar ekan.

7.2. Ikki vektorning koihneai lik sharti

ci - -ciA ■ u_v*J* ■ *uЛ* va *b --b.A ~byj* ■ *b.k* vektorlar kollincar bo'lsin. koilineal vektorlar uchun shunday л son mavjud bo lib </ Л r'yi'i qo'}^ bajarilishi aytilgan edi. Bunga vektorlarni yoyilmalari orqali qiymat arm $a_xi+a_yj+a7 = Abxi+Xb_yj+lb_zk$ yoki bundan teng vektorlarning mos proeksiyalari ham teng bo is 1 I $a.\sim 7.b_x$, a_v-Ab_v, $a_:\sim/.b$-

(7-2)

• oemak ikkita kollinear vektorlarning koordinatalari a ega bo'lamiz. L>cm

te^{n}g^{liklar}L bo'larekan. . ya * vektorlar kollinear bo'ladi.

^ncha(7.2)^'^ a r t o ;n«ng barcha koordinatalarini d

o'zi ham *b* векторни шу *Л* songa

ularning koord,natulan X 3% * -ktor,ar ^>"г"Г r?y ko'paydrish k0|linear bo'lishi uchun
qilib r 5 Xi) proporsional bo'lishi zarur va yetarlt.
'P^ te Siklarni ko'pincha

' (7.3)

Z>v $b_}$. b.

'Indi (7 3) ikki vektorning kollinearlik (parallellik) shaitidir. ko'rinishda vozi a ._ - koordinatalari orasida nolga teng bo'lganlan bo isaXrS kohinearlik sLrtini (7.3) ko'rinishida yozib bo'lmaydi. Bn holda bo'lsa v<kollinearlik shartini

ko'rinishda yozish mumkin.

3- misoI. a = {3;4;5} va b = {б;8;10} vektorlar kollincarmi?

Yechish. 5=25, ya'ni vektorlarning koordinatalari proporsional bo'lganligi uchun vektorlar kollinear.

4- misol. a = {2;3;m} va b = {4;n;3} vektorlar n.m ning qanday qiymatida kollinear bo'ladi?

Yechish. Misolda 4Л=2, =3, a--m, 5V=4, 5v=n, 5/=3.

Kollinearlik sharti (7.3) ga binoan ga ega bo'lamiz. Bundan —- ,
4 n _■> n 2
Z" _ 1 | . 3 3
y°ki n-6, m=— kelib chiqadi. Demak berilgan vektorlar n 6, m-~ bo'lganda kollinear bo'lar ekan.

7.3. Skalyar ko'paytma tushinchasiga olib keluvchi ish haqidagi masala

- Mexanikada F kuch ta'sirida to'g'ri chiziqli harakatlanayotgan jismni masofaga siljitishda kuchning bajargan ishi A ni hisoblashga to'g'ri keladi.

bajarX'i^i'sliu'l^l'5-1 bilan. bi.r >»'ni (A -' <) 0 bo'lganda kuchning . . -| |-| 'IL,n"'g moduli bilan o'tilgan yo'lning ko'paytmasiga teng.
ya'm A-|4Is; bo'ladi.

harab,8a.rJ,Sm F kUCh2"an 9 burchak tashkl1 etuvebi 5 yo'nalish bo'yicha at qilsa unga faqat F kuchnin» 9 i
A, ta'sir etadi Ch k' & vektor yo nalishidagi tashkil etuvehisi
b,lan qarshilik kuchi niuv^z]nathslkUdh?/nF ga PerPendikulyar tashkil etuvehisi ta i. \ ektorning vektorga proeksiyasiga binoan

A_p-j.cos^ bo’ladi. DemakЛ=|A| cos^-p’| = p'|-|5|-cos^. Shunday qilib ,'%>

kuchning bajargan ishi *A* son uzunliklari bilan shu vektorlar orasidagi

burchakni kosin teng bo’ladi. nilS1ni k0- **1-ta‘rif.** ikkita *a* va *b* vektorning **skalyar ko’paytmas**

7.4. Skalyar ko’paytma

i я ■ uzunliklarini ular orasidagi <*p* burchak kosinusiga ko’paytmasi^ W" songa (skalyarga) aytiladi.

./ va *b* vektorlarning skalyar ko’paytmasi *a-b* kabi belgilanadi

Demak, ta’rifga binoan *a-b* =p|-|£| *cos(p* . (7.4)

\a\-cos(p = pr^ a, |

a ■ *b* =*\b\ - p r- a* I|б|-со^ = prв p| bo’lgani uchun (7.4) formulani i yokiI 6 ko’rinishida yozish mumkin. Bu formulalardanя ■ 6 = |5-• pr-p| . (7.5) foydalanib vektornin h vektor yo’nalishiga proeksiyasini ham aniqlash mumkin. Masalan

$$pr_h\, a = \frac{a\text{-}b}{} \qquad (7.6)$$

formula orqali *a* vektorning *b* vektor yo’nalishiga proeksiyasi topiladi. Asar *b* vektor birlik vektor bo’lsa p| =1 bo’lib *pr-Jra-b* bo’ladi, ya‘ni vektorni-. birlik vektori yo’nalishiga proeksiyasi ularning skalyar ko’paytmasiga teng bod ekan.

Skalyar ko’paytma tushinchasidan foydalanib to’g’ri chiziqli harakati *F* kuchni jismni 5 masofaga siljitishda bajargan ishi *A* ni A-/" -S ko’rinishida yozish mumkin.

7.5. Skalyar ko’paytmaning xossalari

1.Skalyar ko’paytma o’rin almashtirish xossasiga ega ya’ni

Bu xossaning to'g’riligi skalyar ko’paytma ta’rifidan bevosita kelib cHa^

2. Skalyar ko’paytuvchini skalyar ko’paytma belgisidan c *4®^ mumkin. ya’ni (A *a\b ~ Л (a* ■ *h).* Bu xossaning to’g’riligi (7.5) or hamda proeksiyaning xossasidan kelib chiqadi:

(A *a\b* =p| ■ p/;,(A *a*)=p! • A • A (pi ■ /?/;)=2 (rrA)

3. Skalyar ko’paytma vektorlarni qo’shishiga nisbatan taqsimo Я

ega, yani *a (b +c ') - a-b lac.* • . И

Bu (7.5) formuladan hamda proeksiyaning xossasidan kelib chiqa '■ ..

a ■ *(b* + c) — *a-pr-(b + c)—a(pr-b + pr-c)—a-pr-b + cb p'-c* a .

4. Ikkita noldan farqli vektorning skalyar ko’paytmasi nol o vektorlarni perpendukulyar bo’lishi zarur va yetarli.

bo'lsin. U holda •cos . |a -ЬI -0=0

ЬЬ0И, <0 - л "bo'lsa, |5|#cos(5^)=0 bo'lib undan chiqadi- a b =0 b0 2 1 1 jtfj qt 0, j/»] / 0 va

lsa› !

" ' nlH sababli eos(^)=0 (W)=p ya'ni

bo 'Iganl's'

„cpendihulyadigi^.^-

Bu xossaga ко ra / j J vektorlaning

Endi vektorni o a

_c/J = 0 (7.7)

bo'ladi. zini-o'ziga skalyar ko'paytmasini topamiz: 1^1 ■ cos0=l^l 'P*|-l=|5| 2-

• n'rini o'ziea skalyar ko'paytmasi vektorning skalyar kvadrati vekto rni oz n i -o

shunday qjlib vcktorning skalyar kvadrati unmg

deyiladi va a KDU1 J Jdulini Kvadrabga ^gekan. . •=

Bunga |£|M bo'ladi.

asosan b J £Pl ' topilsin.

5-misol c=25+3* va d = a-2b vektorlarning skalyar ko'paytmasi

Y

echish.

г. J =(2 5+3 d)(a-2i)=2 5 • 5 -4 5 • 6 +3 • 5 -6 Л • 5 =21«|²- a • b -6 |/?l² .

6- **misol.** c=35-26 vektor berilgan.|^| =5, |£|=4 bo'lib, a va b orasidagi vektorlar burchak 60° bo'lsa c vektorning uzunligi topilsin.

Yechish. 5²=|7z|² formuladan Va' = |#| kelib chiqadi.

Bunga asosan:

|c| -#²=T(3d-2^)²-79J

7.6.Skalyar ko'paytmani vektorlarning koordinalari orqali ifodalash

. a= "*i+a_y j+a_z k va b=bj+b_y j+b_z k formmV benlgan bo›lsin- Skalyar ko'paytmani xossalari hamda (7.7) va (7.8) formulalarga asosan quyidagiga ega bo'lamiz.

. X x' i+a_x byt j+a*b_z i ■ к +a yb_K j ■ I + a_y b_y j- j ~a_y b_7 j к + Shunday oTh"

'«,Ь_7к-_к -a ^ a_y b^a _7 b_7.

ko'paytmasi nomdk^l^k"^^ПГ-1a1a1 * y ordainida berilgan ikki vektorlarning skalyar omdosh koordinatalar ko'paytmalari yig'indisiga teng. ya'ni '

7- misol. 5=27+3 4^ axV^A+«z^ (7.9)

k° paytmasi topilsin * Va ^–'S'+4j+2i vektorlarning skalyar

Yechish. Misolda u_4-2, a_y-3, u_z -1, h_x -3, b_y~4 **A -? kjS**

(7.9) formulaga binoan *a-b* ~2-(-3)+3-41 (-1 *)-2-* 4 bo'ladi <

8-misol. A—{3;2;4} kuch ta'sirida moddiy nuqta to' '• harakat qilayotgan bo'lsin. *F* kuchning shu moddiy nuqtani bo'y, M?.(7;-l;3) holatga ko'chirishda bajargan ishini toping. ' ho]'

Yechish.S = A/.AA - {7-2;-l + 5;3 4}= {.5;4,-i} ekani ayon

(7.9) formulaga binoan A=/- •S=3-5<2-4-r4-(-l)-19 gaegab'i

7.7. Ikki vektor orasidagi burchak ° ЗГП*г‹

Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi 5£=lo|.|ri

■ 1 ГГ°5(aл6) . *a-b*

cos(*Ci* ^*b*)=727Тч ni topamiz.

— *u ' u*
cos(*Ci* ^Л*Ь* Аттн ni topamiz.
ml' г

Agar vektorlar *ci=a_x7+a_yj+a_zk, b =bj +b_yJ \-bJ7* yoyilmari berilgan bo'lsa, u holda (7.9) dan hamda vektorni uzunligini topish formul • dan foydalanib vektorlar orasidagi burchakning kosinusini topish uchun *ab±ab+ab* eos(*a* ^Л*Ь)=* - \
Ja^ +a_v' + a.~ • yjb_x~ + b_r~ +b.^{2} (7.10)

formulani hosil qilamiz.

8- **misol.** *a=7- k , b=7 +2j -2 k* vektorlar orasidagi burchak topilsin. **Yechish.**(7.10) formulaga asosan

,-лГч I • 1 + 0 • 2 + (-1) ■ (-2) _ 3 1
<1? +0^2 +(-l) -V^1 +2" -'(-2)' 302 02

(<7Л6)=45^0 bo'ladi.

9- **misol.**Uchlari A(2;-l;3), B(l;l;l) **va** C(0;0;5) nuqtalarda bo'lgar. uchburchakning burchaklari topilsin.

Yechish. Boshi va oxiri berilgan vektorni koordinatalarini topish formulas (6.7) ga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz:

AB {1 - 2:1 1:1 ■ 3}= {-l;2:-2}, 4C = {o - 2:0 + 1;5 - 3} = {- 2:1;2}, *BA* =- Л5={1;-22}»

BC-{0 1.0-1;5 - I) = {-1-1,4}.

Ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasi (7.10) ga asosan: cos cost.oM izi ■ . . • !

I'M 2; : (1)' 7(-2)? M^1 ! 2-

bundan ZB=45°.

bundan Z/l=90^y, JI
cos z-s=cos< « л *вс*)"—,,1-(2 "т%
F .2- ^ If $_м$*чГ-+4- ^J|S* "

Z/l+ Z5 + ZC = 180°dan ZC =45° kelib chiqadi. . birchak e^:1

Demak qaralayotgan uchburchak teng yonli to'g'ri burchakli uc

₇.8.1kki vektorning **perpendikulyarlik** b (nolmas) vektorlar

, , ko'paytmani 4-xossasiga bajarilishi zarur va yetarli edi.

Skalyar P,|ishi uchun a b (711) ikki vektorning

'*^n»fbnnutae a‹‹os.a"?Xm^SlwInday qilib ikkita noldan farqli """Id kulyarlik shadin'. *hos* 4

sh• uchyn u|arni nontdosh koordinatalar, ^Sar o'zaro Per^nd!; У.кa(eпе bo'lishi zarurvayetarh ekan.

ko'paytn,alarinin8->J®va vektorlar m ning qanday qtymatlarida

10- niisol. dr-1²˒ л >

neroendikulyar bo ladl- ... harti /7.11) ga asosan 2-4+(-3) -2+(-l) -m=0.

Yechish-Perpendikulyo ^=2 da perpendikulyar bo'lar ekan.

Bundan 2-ni'O, m z. va b=-27 + 7+* vektorlar perpcndikulyarmi?

11›m,Sh l a /=l-(-2)+6-l+(-4)-l=6-6=0. Demak *alb*.

yeChh Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi son bo'lganligi sababli uch va

1-izoh. kk _kalvar ko'paytmalari haqida so'z bo'lishi mumkin emas.

uchun vektor Oxy; fazoda

,, ■ kabi tasvirlanganligi sababli chiqarilgan formulalarda vektorning applikatasi nolga teng. (», .0, *b.* =0) deb olinsa o'sha formulaning tekislikdagi vektorlar uchun xususiy ko'rinishi hosil bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun masqlar va test savoliari

1 5=27-67+3^ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari topilsin.

Javob: cosrz = -, cos*0*~,cosy 2 „6 _3

2. Ox va Oy o'qlar bilan 30° va 60" burchak tashkil etuvehi vektor oz o'q bilan qancha burchak tashkil etadi. Javob: y=90°.

3. Nuqtaga koordinata o'qlaridagi proeksiyalari xi=I, yi=2, iq-3; x_2=-2. y_2-3, z_2=-4; x_3=3, y_3=-4, z_3=5 bo'lgan kuchlar ta'sir etadi. Shu kuchlarni teng ta'sir etuvehisi topilsin (moduli va yo'nalishi).

Javob: |a| = *4T*\, cost?=~L, cos/?--4=, cos y - -~= ■

v 21 V21 ЛТ

. o-3/ +mj-2£ va *b =6i +4 j +x\k* vektorlar /и va *n* ning qanday qiymatlarda kollinear (parallel) bo'ladi. Javob: w=2, n=-4.

5. *a* 2/+3 /-4A- va *b ~-j+2к* vektorlarning skalyar ko'paytmasi topilsin.Javob: -11. 7 ва

Й²;-3;0} vektorlar perpendikulyarmi? Javob: ha.

kuchihn nU^a } <Kuch ta'sirida to'gri chiziqli harakat qiladi. Shu

ЬМЙГО» - 1?° 'У nucltan› koordinatalar boshidan *i* (2;1.4) nuqtaga ko'chirishda bajargamshi topilsin. Javob: J-16. nuqtXabeXrrm\? иг'113"

9. *a=7+^ v* vadiagonallarini perpendekulyarligi va D(-5;-5;3)

/+ 7 *2 *к* vektorlar orasidagi burchak topilsi isbotlansin.

n. Javob: (S)=45°.

\Q.c=a-2b , |5| p | =4 hamda (a ^л h)=60°

topilsin. Javob: к=7.⁼3,

I 1.Uchlari/1(2;-!;3). Я (1; 1; 1) va <' (0;0;5) nuqtalardabo’l burchaklari hamda perimctri topilsin. Javob; z.4=90° § an Uc hbu rc i

12. /l;2, 1;} va 6'2;2;0;} vektorlar berilgan. c{x;y;-.6.J V(f C=45○’p7} kollinear bo'lsa |cj ni toping.

Л) 2/14 B) 3/14 D) 1 1 E) 9 F) 14.

13. /3-./ 6:4} bo'lsa. A ning qanday qiymatida a+* 1 perpendikulyar bo’ladi? ' ■

A)-8.5 B) 8,5 D) 9 E) 10 F) -9.

14. Agar *a\2.m* va *b{3:n}* bo’lsa, m va n ning qanday natural qi *a-b* vektorlar o’zaro perpendikulyar bo'ladi ?

A)3;2 B)1;6 D) 2;3 E)6;l F) 3;3.

15. x ning qanday qiymatlarida u {8;4;5r} va *b* = *{2x-25-\]* JI perpendikulyar bo’ladi.

A) 3 B) 4 D)5 E)-4 F) 6.

16. *a{3* ;2;1J va *b{* 2 ;5;3} vektorlar berilgan.

c 3«-46 vektorning koordinatalarini toping.

A) {-14;6;9) B) {l7;!4;-9} D) {17;- 14;9} E) {17;-14;-9} F) {|4;-6:J

17. x ning qanday qiymatlarida a{3,3,5) va = {-2;4;x} vektorlar parallelb;

;

A) barcha qiymatlarida B) hech bir qiymatida D) 6 E) 8 F) 12.

18. A- ning qanday qiymatlarida G = {x;x;2) va 6 = {x;l;-3} vektorlar perpendikuliar bo'ladi?

A) 2 va-3 B)2va3 D)-2 va 3 E)-2va-3 F)3va4.

19. /7/ va / 4:-JO, vektorlar orasidagi burchakni toping.

A) 135" B) 45° D) 60'’ E) 30° F) 150°.

20. Agar 2c 46 va 46 a 5c vektorlar o’zaro perpendikulyar bo Isa, i vac 1 vektorlar orasidagi burchakni toping.

A) 90° B) 120" D) 60° E) 30" F) 45°. .

21. Agar *a* va 6 120' li burchak tashkil etuvehi birlik vektorlar bo Isa, *a* ■: /-vektorlar огамба/burchakni toping.

A) 135° B) 90" D) 150" E) 30'Г F) 120°.

O’z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Vcktorn. \ o’naltiruvehi kosinuslari nima va ular qanday ЮРЯ
2. Vektorlarning koi linearlik shartini yozing.
3. Ikki vektorning skalyar ko’paytmasi deb nimaga aytila 1 • I
4. Skalyar ko’paytma qanday xossalarga ega ?
5. Skalyar ko’paytma qanday topiladi ?
6. Vektorlar orasidagi burchak qanday topiladi ?
7. Ikki vektorning perpendikulyarlik sharti nimadan i or 3

в Skalyar ko'paytmaning fizik ma'nosi nima ?
a bilinear vektorlarning skalyar ko'paytmas! nimaga teng? ^0 Vektorning skalyar kvadrati nima?

8- ma'ruza. Mavzu: Vektorlarning vektor va aralash ko'paytmasi

Reja; , ,
I Ikki vektorni vektor ко paytmasi.
2. Vektor ko'paytmaning xossalari.
3. Vektor ko'paytmani topish.
4. Uch vektorni aralash ko'paytmasi.
5. Aralash ko'paytmani geometrik ma'nosi
6. L'ch vektorning komplanarlik sharti. Adabiyotlar: 3,5,8,9,12,16.

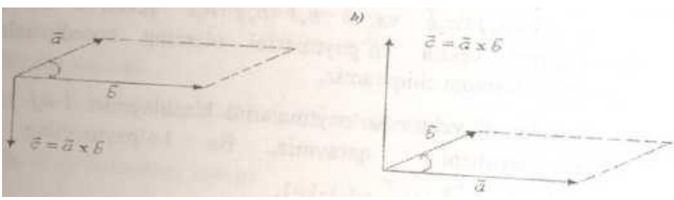
Tayanch iboralar: vektor ko'paytma, aralash ko'paytma, komplanarlik

8.1.Ikki vektorning vektorli ko'paytmasi 'ЙЕ к.

1-ta'rif. *a* vektorning *b* vektorga vektor ko'paytmasi deb quyidagi shartlam., qanoatlantiradigan *c* vektorga aytiladi: ^feartlarni

a) vektor *a* va *b* ko'paytuvchi vektorlarning har ikkalasiga perpendikulyar
Ы *c* vektorning uchidan qaraganda *S* vektordan *b* vektorna ,,• 'lfel,|yar; bunltsh ntasofasi soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda ko'rinadi; qisqa
d) *c* vektorning uzunligi *5* va *b* vektorlardan vasal«an naralWn .
yuziga teng, ya'ni = M- (8.1) ' ° ■'Vmning

a vektorning i vektorga vektor ko-paytntasi Sxi kabi beIgilanadi(26.ehizma).



26-chizma.

""^ntning
' Ko'paytuvchilarning' xossalari
ve£™ning ish0^i o'Lradi -lnMSll,irish ™i^a
Bu «8 ,o,s,ri,i^vekte
^ektor
3 < Л -cXrma bel8idan * —• 'riligi

< ya'ni

4. Vektor ko’paytma ko’paytuvchi vektorlardan biri nol vekt bo’lganda yoki vektorlar kollinear bo’lgandagina noiga teng bo’ladi.

Bu xossadan istalgan vektorni o’zini-o’ziga vektor ko’paytmasi nol vekto^ tengligi, ya‘ni 5x *a = 0* ekani kelib chiqadi. Jumladan dekart bazisi *i J $_y$k* ucM *i* x *i = j* x ./’=£ x *k-0* ga ega bo’lamiz.

1- misol (35-26)x(45+36) topilsin.

Yechish 5x5=0, *bxb~0, b*a=-axb* ekanini hisobga olib quyidan ega bo’lamiz.
(3 5-26)x(45+36)—12(5 x 5)+9(5 *xb*)-8(*b* x 5)-6(6 x *b*)=120+9(5x6)+ +8(5x6)- 6'0=17(5 x 6).

2- misoI. (5-6)x(5+6)=2(5x 6) tenglik isbotlanib, uning geometrik ma‘no$’ izohlansin.

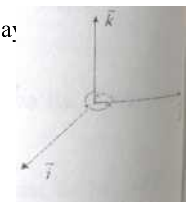
Yechish.(5- 6)x(5 + 6)=5x5+5x6-6 x 5-6 x 6 =0+5 x 6 + 5 x 6-0=2(6$_x$j 5-6 va 5+6 tomonlari 5 va 6 bo’lgan parallelogrammning diagonailarin ifodalaydi. |(5-6)x(5+6)| ifoda tomonlari berilgan parallelogrammnins diagonallaridan iborat parallelogrammning yuzini, p x 6*| esa tomonlari *a* va 6 vektorlardan iborat parallelogrammning yuzini ifodalaydi.

Shunday qilib isbotlangan tenglik, tomonlari 5 va 6 vektordan ibora: parallelogramm yuzini ikkilangani tomonlari shu parallelograrnmninc diagonallaridan iborat parallelogrammning yuziga tengligini bildiradi.

8.3. Vektor ko’pavtmani topish

*a=a*i+a$_y$j+a$_z$k* va *b=b*i+b$_y$j+b$_z$k* vektorlar berilgan bo’lsin. Shi vektorlarning vektor ko’paytmasini ularning koordinatalaridan foydalanib topiladigan formula chiqaramiz.

i J ,k vektorni vektor ko’paytmaiarini hisoblaymiz. *ixj* vektor ko’pa\
Bu ko’paytmaning moduli |/xy = j/|-|/|sin



27-chizma

qaraymiz.

- = 111=1.
2

ixj vektor *iv&j* vektorning har biriga perpendikulyar bo’lgani uchun u 0j o’qda joylashgan va u bilan bir xil yo’nalgan. Chunki uning uchidan qaragandan / dan *j* ga qisqa burilish masofasi soat mili aylanishi yo’nalishiga teskari ko’rinadi.

•

r shuni^i

Demak, z > *J* vektor *κ* vektorning o’ziga tenc ekan. ya‘ni z *xj~k. &* I

------ - - - -

. z Ushh

A X z =7, / X *κ ~i, j / i* =- *κ, κ* X ./=- /, *i xk* =-*j* tengliklarga ega bo’lan” V tengliklardan hamda *i*i=j*j=k*k=Q* dan va vektor ko'paytmaning xossalaridan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz.

^a_yj -kajk^ibyi +b_yj +bjc)=axb^i *i)+$a_x b_j$(i xj)+a^i *k)+ a^byU * z)+«y^.i(7 x

J)+$a_y b_z$(j x к)+$a_z b_x$(k x i)+$a_z b_y$(k x j)+a_zb£k x к)=$a_x b_x$-0+ a_xb, к-$a_x b_7$j -$a_y b_x$i+

$a_y b_y$Q+a_yb, i +$a_z b_x$j-$a_z b_y$i +$a_z b_z$Q=($a_y b_z$-$a_z$by) i -($a_x b_z$-$a_z b_x$) j+ {$a_x b_y$-$a_y b_x$)k =

i,. . a_x a. К j к

b- bX b- I Px av az ■

|/>v bvbt

Demak *a* vektorning *b* vektorga vektor ko'paytmasini

i j к

ax ay a:

h? by b' * (8.2)

formula yordamida topilar ekan. Jumladan tomonlari *a* va *b* vektorlardan iborat parallelogrammning yuzi

/ j к

Sp=px/>! = a_x a_y a. (83)

bx bj b

formula yordamida vashu vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzi esa Г a.

(8.4)

formula yordamida topiladi.

3-misol. #=-4/+3Z va 6=3/+J-2A topilsin. vektorlarning vektor ko'paytmasi

Yechish. (8.2) formulaga asosan:

_ .. 1 'j -4 3 -4 O'

a x ~ - 4 0 I 3 I I =-3/ +./-4 A.

3 -2 3 1

4-misol. Tomonlari *a~i-3j* I)=2 *i* - *j*+3A- vektorlardan iborat parallelogrammning yuzi topilsin.

Yechish (8.2) formulaga binoan:

1 -3I

H-9+l)>-(3-2)J+(-l+6H =

2 -ij

-8»-J+5A.

i(7 X = 7(-8)^2 + (-l)^2 + 5^2 = V90 =3 • VT6

(8.3) ga asosan S_p=3-VTo kv. birlik bo’ladi.

5-misol. Uchlari /1(3; 4;-l), 5(2; 0; 3) ва C(-3; 5; 4) nuqtalarga bo’lg; uchburchakning yuzi topilsin.

Yechish. ЛД ={2-3; 0-4; 3+1 }={-l;-4; 4}, ЛC={-3-3; 5-4; 4+1 }={-6; 1;5 (8.2) formulaga ko’ra: (-20-4)-./(-5+24)+^ (-1-24}

Yechish: Sa=- p5x/icj

AB x *AC* $\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ -1 & -4 & 4 \\ -6 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ -4 1 5 1-6 -6 15 sin *A*- $\dfrac{|AB \times AC|}{|AB|\cdot|AC|}$ (8.5) =1 j/15|-|/ic|sin *A* tenglikdan

= 24 *i* +197-25 *k*

formulaga ega bo’lamiz.

$S_\Delta = \frac{1}{2}|AB \times AC| = \frac{1}{2}\sqrt{(-24)^2+19^2+25^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1562}$. Demak, $S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{1562}$ kv. birlik

Л5 ={3-1; 4-2; 5-3}={2; 2; 2}, ЛC ={2-1; 4-2; 7-3}={l; 2; 4}, p5| = /2^T + 2^2 + 2^2 =2/3 , pc| = Vl^2 + 2^2 + 4^2 =V2l,

6-misol. Uchlari /1(1; 2; 3), 5(3; 4; 5) va C(2; 4; 7) nuqtalarda bo’ uchburchakning ,4 burchagini sinusi topilsin.

ABx AC= $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ = / $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ -*j* $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ + ^ $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ $=4\vec i - 6\vec j + 2\vec k$,

ABx +*(-6)*^{2}+*2'*tengliklarga egamiz (8.5) formulaga ko’n

. л/56 -7 4 • 2 • / -71 , ,. ,.
sin.l=—=—— bo ladi.
2V3-V2I 2V3-V3-7 3 I

BC~ < *AB*^{2} + *AC*^{2} bo’lganda A burchak o’tkir, 5C^2 > *AB*^{2} + *AC'* bo Igan^i u o’tmas burchak bo’ladi

8.4. Uch vektorning aralash ko’paytmasi

a,b va c vektorlar berilgan bo’lsin. , c

2-ta'rif. *a* vektorning *b* vektorga vektor ko’paytmasi *a***b* **ni** **UC** **. Д** *c* vektorga skalyar ko’paytirish natijasida hosil bo’lgan son *a,b, c* vektorlarn^ ■*. - *r —к i+ь* aralash ko’paytmasi deyiladi. Vektorlar *a-c^ 1 +a$_y$J+a$_:$k*, o-A'

c-c$_a$i +Ci,j+cJ<

oyjlrnalari yordamida berilganda ularning aralash ko'paytmasi (<?x *h*)-*c* ni topish uchun formula chiqaramiz.

(*a* x *Ь*)= ;• *j i<* *a*. *a*ᵣ *a*. *b*, b_v b_s = $^a{}_v{}^a$.-• *i* - a_x *a*. *h h* *h h* .*J*+ a_x a_y *h h* A

vektorni skalyar ko'paytmani topish formulasi (7.9) ga asoslanib " = *c*, *i* +$c_v j^+$ *cj<* vektorga skalyar ko'paytiramiz . U holda

a (*a* 2 *b<* *b*, ▪ $^c{}_v$ ▪ c/ᵣ *Cl.* b_x *b*: • C,, + *a* ᵣ *a* „ b_s b_v

kelib chiqadi. Bu tengiikning o'ng tomonidagi ifoda $<7_t$ °--

determinantning uchinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasi ekanini ko'rish emas. Demakqiyir»

c_v c_v *c*.

Shunday qilib, uch vektorning aralash ko'paytmasi uchinchi tartibli determinantga teng bo'lib uning birinchi satrini birinchi ko'paytuvchi vektorning. koordinatalari, ikkinchi va uchinchi satrlarini ikkinchi va uchinchi ko'paytuvch# vektorlarning koordinatalari tashkil etadi.

7-misol. *a*= 3 *i*+47+2 A , *b* = 3*i*+5*j*-*k* va c=2z+3j+5A- vektorlarning aralash ko'paytmasi topilsin .

Yechish. (8.6) formulaga asosan:

(axb)-c= 3 4 2 / 3 5-1 / 2 3 5 =3 5 3 5| j 2 S +2 ȝ' si ' 2 =3(25+3)-4(15+2)+2(9-10)= 14

8.5. Aralash ko'paytnianing geometrik ma'nosi

Boshlari bitta nuqtada bo'lgan *a,b,c* nokomplanar vektorlarni qaraymiz^ U veɪ<to rlarni qirra deb parallelepiped yasaymiz. Uzinligi <7 va *b* vektorlarg<* QL.S^an Parall^o grammning yuzi (7 ga teng bo'lgan *ci* = *a***b* vektorni yasaymiz- ªУаг ko'paytmani ta'rifiga binoan:

(*axb*)'C-|<zxZ>'■|c|-cos(<V^Ac)-oj<-j •cos(r/^Acj.

deb faraz qilamiz. U holda parallelepipedning balandligi h orqali

belgilasak /?=|c|-cos(<7^Ac) kelib chiqadi. Shunday qilib aralash ko’paytn

(axb)-c~Q-h bo’ladi.

Parallelepipedning hajmini *V* deb belgilasak u asosining yuzi *Q* bilan balandligi *h* ning ko’paytmasiga teng, ya’ni *V--Q-h* bo’ladi.

Shunday qilib bu holda uch vektorning aralash ko’paytmasi qirralari shu vektorlardan iborat parallelepipedning hajmiga teng, ya’ni *(a*b*)c=K bo’lar ekan.

Agar ^7^AcJ>£_ bo’lsa, cos(t7^Ac]<0, p-| cos(d^AcJ--/? bo’lib (ax6)-c=.

V bo’ladi. Har ikkala holni birlashtirib (*a* x *b* *)-c-±И* yoki И=|(г/хб)-c|

formulaga ega bo’lamiz.

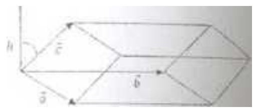
Shunday qilib, uch vektorni aralash ko’paytmasini absolyut qiymati shu vektorlarni qirra deb ulardan yasalgan parallelepipedning hajmiga teng ekan.

Bu aralash ko’paytmaning geometrik ma’nosidir.

Demak qirralari *d, b* va *c* vektorlardan iborat parallelepipedning hajmi $v_{/XI/}$.=|(ax&)-c| (8.7)

formula yordamida topiladi.

d = <2 X b



28-chizma.

Endi qirralari *a, b, c* vektorlardan iborat uchburchakli piramidaning hajmini topamiz.

Bu holda piramidaning hajmi qirralari, xuddi shunday parallelepipedning hajmining oltidan biriga teng ekani elemintar geometriyadan malum.

Shunday qilib

"(ax/?)-c1 (8.8)

piramidani hajmini topish formulasini hosil qilamiz.

8- misol. Uchlari .4(0: 0: 0), в(3;4;-1). Г(2;3:5), D(6;0;-3) nuqM bo’lgan uchburchakli piramidaning hajmi topilsin.

Yechish: Qaralayotgan hoi uchun (8.8) formula

i 6 ^x)'ko’rinishiga ega. *Ab* - {3;4;—1/, ЛСЙ

AD- {6:0;-3} bo’lgani uchun

$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}3 & 4 & -1\\ 2 & 3 & 5\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}3 & 5\\ 0 & -3\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}2 & 5\\ 6 & -3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 0\end{vmatrix}$

-:?у(-9)-4(-6-30)+18-135 va V=~ 1135] =22,5 kelib chiqadi.

8.6. Uch vektorning komplanarlik sharti

Uchta komplanar noldan farqli *a,b,c* vektorlarni qaraymiz. Soddaiik uchun bu vektorlar bir tekistlikda yotadi deb faraz qilamiz. Bu vektorlarni aralash ko'paytmasi (ax A)-c nituzamiz. *a*b* vektor ko'paytma *a* va *b* vektorlarning har biriga perpendikulyar bo'lgani uchun u ular yotgan tekistlikka ham, jumladan *c* vektorga ham perpendikulyar bo'ladi. Perpendikulyar vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga tengligidan *(a*b)c-Q* kelib chiqadi. Demak komplanar vektorlarning aralash ko'paytmasi nolga teng ekan. Tesqarisi ham urinli, yani aralash ko'paytmasi nolga teng vektorlar komplanar bo'ladi.

Haqiqatan, vektorlar nokomplanar bo'lsa vektorlarni qirra deb parallelepiped yasash mumkin bo'lib uninghajmi bo'ladi. Ammo U=j(axi>)-<q bo'lgani

uchun (*a*b*)-c#0 bo'ladi. Bu shartga zid.

Shunday qilib uchta *a,b,c* (noldan farqli) vektorlarning komplanar bo'lishi uchun

и .-

*(a*b)-c~0* yoki b_r *b,* =0 (8.9)

HL c_v c,z

uch vektorning komplanarlik shartidir .

9-misol. a={3;4;5}, 6{1;2;2},

$\begin{vmatrix}3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 2\\ 9 & 14 & 16\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2 & 2\\ 14 & 16\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}1 & 2\\ 9 & 16\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}1 & 2\\ 9 & 14\end{vmatrix}$

ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir .

s,lart* (8-9) bajarilganligi uchun vektorlar komplanar.

tekislikda yotadimp'^'>4(6), C(2;2;3) va /.)(IO: 14; 1 7) nuqtalar bitta

4›0; ЙС={2-1; 2-0; 3-1}={l;2;2},

v*'orlami qara ' l7''M9; 14; 16}

I Y z-Ularning aralash ko'paytmasini hisoblaymiz:

vektorning komplanarligi ko'rsatilsin .

Yechish.

=3-4-4-(-2)+5-(-4)=0.

$\left(\vec{AC}\right)\cdot\vec{AD}=\begin{vmatrix}3&4&5\\1&2&2\\9&4&16\end{vmatrix}=3\cdot4-4(-2)-5\cdot4=0.$

-arnii-ag aralash ko'paytmasi nolga teng, ular komplanar tekestliktayotadi.
Va

r^^h- B iz kerakli formulalarni faqatgina fazodagi vekt I Iz* Arrnrn0 keltirilSan formulalar tekistlikdagi vektorlar uchun Uch l^irdagj vektorlarning uchinchi koordinata (applikata)lari по^н tekistlikdagi vektorlar uchun o'rinli bo'ladi. Masalan tk'0-^ y°yilniaga e..

$a = zz.v^1 + a_y j$, $-b_x i + b_y j$ (z J -dekart bazisi) kabi

^^ning vektor ko'paytmasi $axb =$ $\begin{vmatrix} / & 7 & \kappa' \\ <v_r & a,, & 0 \\ b_r & b_v & 0 \end{vmatrix}$ 6, ■k bo'ladi.

Biz erkin vektorlar bilan ish ko'rganimiz uchun ko'p h 2' ^an vektorlarning boshi bir nuqtada deb faraz qildik

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

)A^~5b) topilsin. Javob: -13(axb).

, - 6=2z +57 vektorlarning vektor ko'paytmasi topilsin.

— b ~-5 z +27+17 A .

, x.^(3;4;5), B(2;l;l) va C(0;2;3) nuqtalarda bo'lgan uchburchakningyuzi Javob: ~V153 kv. b.

•h, 2

* , <3 j-k ■> b~ 7+ va c- J-k vektorlarning aralash ko'paytmasi topilsin.

Xi

j iX1' ^<0›0›0)' /f(5;2;0), £?(2;5;0) va C(l;2;4) nuqtalarda bo'lfc ^p^ng hajmi, ABC yoyining yuzi hamda shu yoqqa o'tkazilgan baland ■ . j^vob: V=14kub. bir. H~-~-3-, SIV(W--6V3

tzs^ri i7=/-3j+A, b -2 i -J+3 κ vektorlardan iborat parallelogrami"11'1-

/Гo , R

.. p-iri topilsin. Javob: h,-3VJ.\ h/-3*!.
Ilikl^ r vll 77

, vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzi topilsin.

3/^ B) 10,5 D) 60 E) 7 F) 5

' ■? va /?{2:4;3} vektorlardan yasalgan parallelogrammningyuzi topils,n

B) VT89 D) V285 E) $J186$ F) 17.

a[2;3-2}, Z>{5;4;-1} va c{6;3;2} vektorlardan iborat
piramedafc3ⁿ*ⁿS

top>'j— , **2**

A)l| 3).- D)2 E) 3 F) 1,2.

10. va c{-2;9;-l) vektorlar *x* ning qanday qtj»y mal,a‹;

rtn BW 0)2

ц_ Д2;-3;1), ^)(3;2; , ~ 2 E) -3 F) -2.

:;-2), C(-l;l;3) va D(0;6;0) nuqtalar berilgan. To'g'B n javc, oP A) nuqtalar bir tekislikda yotadi.

B) nuqtalar bir tekislikda yotmaydi.

D) лЭ. /C. 75 vektorlardan parallelepiped yasash mumkin.

E) vektorlarni qirra hisoblab ulardan yasalgan риатеЬаг»*п'п3

4 kub. birlikka teng.

F) nuqtalar parallel tekisliklarga yotadi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi nima?
2. Vektor ko'paytma qanaqa xossaga ega?
3. Vektor ko'paytmani geometrik ma'nosi nima?
4. Vektor ko'paytma qanday topiladi?
5. Parallelogramm va uchburchakni yuzini topish formulasini yozing.
6. Uch vektorni aralash ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
7. Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi nima?
8. Aralash ko'paytma qanday topiladi?
9. Aralash ko'paytma yordamida parallelepiped va piramidaning hajmiil*ni toP" formulasini yoziing.
10. Uch vektorning komplanariik sharti nimadan iborat?
11. To'rtta nuqtaning bir tekislikda yotish yoki yotmasligi qanday tekshiri IU1 -

9- ma'ruza. Mavzu: Tekislikdagi to'g'ri chiziq tenglamalari

Reja:

1. Analitik geometriya fani haqida qisqacha maTumot.
2. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak tushunchasi.
3. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.

4- Io g ri chiziqning umumiy koTinishidagi tenglamasi.

5. To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi.
6. To'g'ri chiziqni tenglamasiga ko'rayasash.

7- Ikki to g ri chiziq orasidagi burchak.

8. Ikki to g'ri chiziqning parallellik sharti.

Ikki to'g ri chiziqning perpendikulyarlik sharti.

Adabiyotlar: 3,5,7,10,11.15,16.

РагаП^Г1ПСЬ '^ora*ar t0 Sг' chiziq, burchak koeffitsient, boshlang'ich oreJ^iriata F* e
1perpendikulyarlik, burchak. analitik geometriya.

9.1. Analitik geometriya fani haqida qisqacha ma‘lumot

Analitik geometriya fanining asoschisi fransuz matematigj va k.Dekart ekanligi aytib o’tilgan edi. Analitik geometriya--oliy maternafv geometrik figuralarni algebraik ifoda etuvehi va algebraik ifodalarga o$_e$ ma'no beruvehi tarmog’i. Analitik geometriya fani geometriyani a|o$_e$ь etr’* matematik anaiiz fanlari bilan uzviy bog’lovchi bo’g’in hisoblanadi.

Elementar geometriya planomctriya va stereometriyaga bo’linoanli • analitik geometriya ham ikki qismga: 1) tekislikdagi analitik geoine-

2) fazodagi analitik geometriyaga bo’linadi.

Analitik geometriyani o’rganishni uning birinchi qismi-tekislikdagi analitik geometriyani o’rganishdan boshlaymiz.

9.2. Ikki to’gri cliizq orasidagi burchak tushinchasi

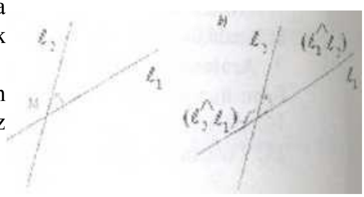
Олу tekislikda yotgan va *M* nuqtada kesishuvehi va to’g’ri chiziq! qaraymiz.

1- ta‘rif. va t?$_2$ to’g’ri chiziqlar orasidagi burchak deb ni bih ustma-ust tushishi uchun uni *M* nuqta atrofida soat mili aylanishiga teskar yo’nalishida burilishi lozim bo’lgan eng kichik burchakka aytiladi. (29"-chizma)

(?, va to’g’ri chiziqlar orasidagi burchak f/C kabi belgilanadi.

Keltirilgan ta‘rifga ko’ra *e*, va d_2 to’g’ri chiziqlar orasidagi burchak f, \ (q to’g’ri chiziqlar orqasidagi burchakka teng emas. Ta‘rifga binoan bo’ladi (29^b-chizma).

To’g’ri chiziqlar parallel •*» bo’lganda yoki ustma-ust tushganda ular orasidagi burchak nolga teng hisoblanadi.



29- chizma.

Keltirilgan ta‘rif to’g’rii chiziqlardan biri o’q, masalan Ox o’q bo’lganda ham o’z kuchini saqlaydi.

Demak Ол- o’q bilan biror to’g’ri chiziq orasidagi burchak deganda Oxo’qn to’g’ri chiziq bilan ustma-ust tushishi uchun uni soat mili aylanishiga teskar yo’nalishda burilishi lozim bo’lgan burchak tushiniladi.

9.3. 1 o’g’i i chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi

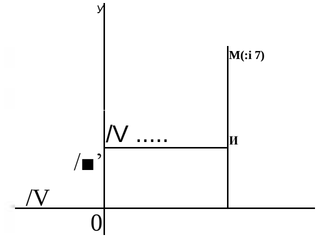
Oxy tekislikni hamda unda yotgan to’g’ri chiziqni qaraymiz. To’g’ri ch® koordinata o’qlarining hech biriga parallel bo’lmasdan Oy o’q bilan /?(0;Л) nU(1® kesishsin va Ox o’qning musbat yo’nalishi bilan *a* burchak tashkil etsin- (chizma.) Shu to’g’ri chiziqning dekartning to’g’ri burchakli koordm . sistemasiga nisbatan tenglamasini topamiz, ya‘ni x va y dekart koordina^a •, bog’lovchi shunday tenglamani topamizki to’g’ri chiziqning barcha nuq koordinatalari shu tenglamani qanoatlantiradi, to’g’ri chiziqda yotmaydig^{an} bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi.

< qilaylik *M(x;y)* nuqta to’g’ri chiziqning B(0;b) nuqtasidan farqli istalgan

• too'lsin. 30-chizmadagi *NBNM* dan -------------- *-tga* yoki *MN-tga BN*

nUqtasi *BN*

ega bo’lamiz. *MN = y-b, BN-x* ekanligini hisobga olsak *y-b = tgax* *ten*^, ^*a-xtb* kelib chiqadi. *к = tga* deb belgilasak y = fcc + Z> (9.1) tenglama yoki y = Lil bo'l^1- n gu tenglama berilgan to’g’ri hizioni tenglamasi. Chunki uni to’g’ri c . • n, istalgan /3(0;6) nuqtadan farqli c nuqtasining koordinatalari



30-chizma.

aaiwatlantlirishini ko’rdik. B(0;6) nuqtaning koordinatalari ham uni qanoatlanC*rishi ko’rinib turibdi. To’g’ri chiziqda yotmaydigan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantSrrnasligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

k^tgt&x son to’g’ri chiziqning burchak koeffitsienti deb ataladi, b esa to’g’ri chiziqning boshlangich ordinatasi deyiladi.

To’g’iri chiziqning (9.1) tenglamasi uning burchak koeffitsientli tenglamasi deyiladi.

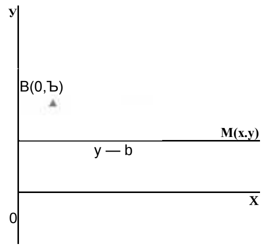
Faraz -qilaylik to’g’ri chiziq Ox o’qqa parallel bo’lsin (31-chizma).

Bu holda *a* - 0, *к* - *tg()* - 0 bo’lgani uchun to’g’ri chizxiq tenglamasi *y=b* (9.2) ko’rinishig^a ega bo’ladi. (9.2) Ox o’qqa parallel to’g’ri chizsniq tenglamasi. Xususiy holda *y=0* 0.x o’qning tcrnglamasi.

To’g’rbi chiziq koordinatalar boshidan o’tsin. U o’tuvchi

to’g’ri chiziiq tenglamasi *y = kx* (9.3) hosil bo’ladi.

holda 6=0 bo’lib koordinatalar boshidan



31 -chizma.

Faraz «jilaylik to’g’ri chiziq A(<.?;0) nuqtadan o’tib Oy o’qqa parallel bo’lsin (32 -chizma*:)

Bu holi Ja to’g’ri chiziq 0.x o’q bilan 90*’ burchak tashkil etibn mavjud bo’lmaganligi uchun

uning tenglsamasini (9.1) ko’rinishda yozib bo’lmaydi. , ’• chi>^rjqiiing barcha nuqtalari *a* abssissaga ega

0 ^anligi umchun lining tenglamasi

. , . . x~a (9-4)

? rin*shga cga bo’ladi, xususiy holda x=0 Oy 0 Aning ten^|amasi bo’ladi.

il Oy o’qdan 3 ga teng kesma ajratib 0.x o’q bilan 45°32-chizma burchak hosil

chi to’jgfc-q-j chiziq tenglamasi yoziisin.

Yechish. Burchak koeffitsientni topamiz: A=/g45" = l. Shartga ko'r_a (9.1) formulaga binoan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenol y^l-л + 3 yoki $y = x + 3$ bo'ladi.

2- misol. Koordinatalar boshi hamda ,4(3; 2) nuqtalardan o'tuvchi 11 chiziq tenglamasi yoziisin.

Yechish. To'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tganligi uchun tenglamasi $y = kx$ ko'rinishga ega bo'ladi. Ikkinchi tomondan /4(3;2) nuqta to^ chiziqda yotganligi uchun

$y = kx$ nı qanoatlantıradı, ya`nı 2=Z?3, bundan k =

2 chiziqning izlanayotgan tenglamasi y=-x

Izoh. Bundan buyon to'g'ri chiziq berilgan yoki to'g'ri chiziq topi|s deyilganda to'g'ri chiziqning tenglamasi '''''b: 111 . ..M tenglamasini topish kerakligi tushuniladi.

nuqtaning koordinatalari to'g'ri chiziq teng|aJΓ . o , ;| ke]jb chjqadj Demak bo'ladi.

berilganini yoki to'g'ri chiziqnir,

9.4. To'g'ri chiziqning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi

Yuqorida to'g'ri chiziq tenglamasi dekart koordinatalari x va *y* ga nisbatan birinchi darajali tenglama bo'lishini ko'rdik. Endi teskarisini isbotlaymiz.

9.1-teorema. Dekart koordinatalari x va y ga nisbatan birinchi darajali **ha** qanday tenglama to'g'ri chiziq tenglamasidir.

Isboti. Dekart koordinatalariga nisbatan birinchi darajali Jx + 5y+C = 0 (9.5) tenglama berilgan bo'lsin. Bunda *A, B, C* ma'lum sonlar bo'lib $A^2 + B^2$ /O,ya'r. A bilan B bir vaqtga nolga teng emas.

a) *B* z 0 bo'lsin. U holda (9.5) tenglamani y ga nisbatan yechsak

y ' $в^x$ $в$ c tengJamaga ega bo'lamiz. Buni (9.1) tenglama bilan taqqoslab u Oy o'qdan -- teng kesma ajratib Ox o'q bilan tangensi gateng bo'lgan *a* burchak tashkil etuvehi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi ekaniga iqror bo'lami.

Demak (9.5) tenglama ham to'g'richiziq tenglamasi ekan. b) B=0 bo'lsin. U holda (9.5) tenglama

Лx +L = u ko'iinishiga ega bo'lib undan x - -- tenglamaga ega bo'lamiz. Bu , л/-£;o] nuqtadan o'tib Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasi.

v -4 J · hizJ'qn'

2-ta'rif. *Ax* + *By* + *C* 0 (9.5) (.f + /EzO) tenglama **to'g'n ᶜ umumiy ko'rinishidagi tenglamasi deb** ataladi.

Endi umumiy ko'rinishdagi tenglamabilan yanada batafsilroq tarns Я

1) B-'O bo’lsin. U holda tenglama

$$-\frac{C}{A}$$

’rinishga keltirilishini ko’rdik. Agar $C * 0$ bo’lsa to’g’ri chiziq Oy o’qqa parallel Hi f=0 bo’lsa tenglama $x-0$ ko’rinishga ega bo’lib bu holda to’g’ri chiziq Oy bo laoi- L o’qda yotadi.

2) A=0 bo’lsin. U holda $B*0$ va to’g’ri chiziq tenglamasi У = ko’rinishga bo’ladi. Bu

tenglama Ox o’qqa parallel to’g’ri chiziq tenglamasidir. C=0

Uganda bundan y-0 Ox o’qning tenglamasi hosil bo’ladi.

3) C=0 bo’lsin. U holda (9.5) tenglama Лx+5y=0 yoki y = —~x ko’rinishiga bo’ladi.

Oxirgi tenglama koordinatalar boshidan o’tuvchi to’g’ri chiziq

tenglamasi ekanini bilamiz. Demak OO bo’lganda to’g’ri chiziq koordinatalar boshidan o’tar ekan.

Izoh. To’g’ri chiziq tenglamasi umumiy ko’rinishda berilganda tenglamadan y topilsa to’g’ri chiziqning burchak koeffitsientii tenglamasi hosil bo’ladi.

Shuning uchun vaziyatga qarab to’g’ri chiziqning u yoki bu ten glamalaridan foy dal an am i z.

9.5. To’g’ri chiziqlarning kesishish nuqtasi

Лл + 5y+C = 0 va /fy + fiy + C, =0 kesishuvchi to’g’ri chiziqlar berilgan bo’lib ularning kesishish nuqtasini topish talab etilsin. To’g’ri chiziqlarning kesishish nuqtasi har ikkala to’g’ri chiziqqa tegishli bo’lganligi sababli uning koordinatalari har ikkala to’g’ri chiziq tenglamasini ham qanoatlantiradi, ya‘ni r^+By+c = o, Цx+Sy + C, =0 sistemaningyechimi bo’ladi.

3- misol. 3x-2y-4=0 va 2x+y-5=0 to’g’ri chiziqlarning kesishish nuqtasi topilsin.

Yechish. Kesishish nuqtasining koordinatalarini j3.v-2y-4---0, *[2x* + y - 5 = 0 sistemani yechib topamiz. Sistemaning ikkinchi tenglamasini 2 ga ko’paytirib uning birinchi tenglamaga hadlab qo’shsak 7x-14=0, bundan x-2 kelib chiqadi. ? - qiymatni sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo’vib г ni topamiz: Г У~5 = o, y = i. Demak to’g’ri chiziqlarning kesishish nuqtasi x-2, y=l
k^maularga ega ekan

To’»’ • -9’6" I °’g’ri chiziqni tenglamasiga ko’ra yasash

un*nS tenglamasiga ko’ra qanday yasash lozimligini ПиЯ{a1агпИ ? r' c^1ız*cln> yasash uchun uning ikkita nuqtasini bilish kifoya. Bu beribikkinl:?/* Chiziq tenglamasidagi x va y laming birortasiga aniq qiymat | c isini aniqlash orqali topish mumkin.

Masalan 2x+y-4=0 to’g’ri chiziqqa tegishli nuqtalarni aniqlash uchun desak *x-2*, *x=0* desak *y=4* kelib chiqadi. Demak /V/,(2;0) va ду nuqtalar qaralayotgan to’g’ri chiziqqa tegishli nuqtalar.

4- misoI. 3x-4y-12-0 to’g’ri chiziq chizilsin.

Yechish. To’g’ri chiziq bilan *Ox* o’qning tenglamasi y-0 ni bj_{ro} yechib, to’g’ri chiziq bilan Ox o’qning kesishish nuqtasi *M* ni topamiz: [3x-4y-12 = 0,

< 3x — 12—0, x - 4.

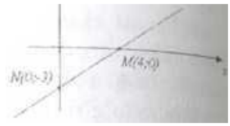
b = o.

Demak Л/ (4;0) nuqta to’g’ri chiziq bilan Ox o’qning kesishish nuqtasi **(33-chi7n^** Shuningdek,

(3x-4)>-12 = 0,

V-o.

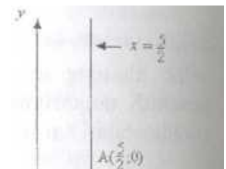
sistemani yechsak to’g’ri chiziq bilan *Oy* o’qning kesishish nuqtasi kelib chiqadi. л-O da -*4y*-12-^0,*y*=-*3*. Demak /У(0;-3) to’g’ri chiziqning *Oy* o’q bilan kesishish nuqtasi. ЛУ(4;0) ва ,v(0;-3) nuqtalar orqali to’g’ri chiziq o’tkazamiz.



33-chizma

5-misol. Zx-5-0 to’g’ri chiziq chizilsin.

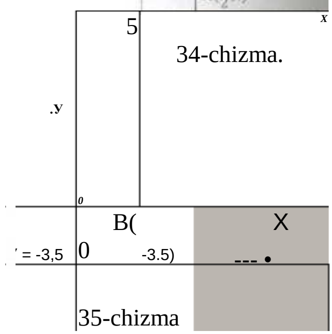
Yechish. Bu holda to’g’ri chiziqni chizish uchun unga tegishli ikkita nuqtani topishga hojat yo’q. Chunki berilgan tenglamani x = | ko’rinishda yozib, u Л^|-;0| nuqtadan Oy o’qqa parallel o’tkazilgan to’g’ri chiziq tenglamasi ekanligini ko’ramiz (34-chizma).



34-chizma.

6-misol. 2y+7=0 to’g’ri chiziq chizilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani y=- 3,5 ko’rinishda yozsak u £(0;-3,5) nuqtadan *Oy* o’qqa parallel o’tadigan to’g’ri chiziq tenglamasi ekanligi bo’ladi(35-chizma).ay on Bu holda to’g’ri chiziqni chizish uchunham tegishli ikkita nuqtani topishga yo qunga ekan. hojat



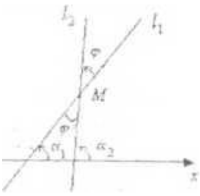
35-chizma

9.7.Ikkita to’g’ri chiziq orasidagi burchak

M nuqtada kesishuvehi C va to’g’ri chiziqlar mos ravishda *y*~ jbtf va $y = k_2x + b_2$ tenglamalar yordamida berilgan bo’lsin. Shu to’g[rl] oasidagi *v*> burchakning tangensini topamiz (36-chizma).

$_{90}$<> mavjud bo'lmaganligi uchun $_v$a (. to'g'ri chiziqtlar o'zaro pendikulvar emas deb faraz qilamiz. ^Jlumki ' uchburchakning tashqi burchagi (a,) o'ziga qo'shni bo'imagan ichki burchaklar («.,,(/>) ning ko'ra Lg'indisiga teng. Shunga chizmadan 36-екИ tenglikka ega bo'lamiz. $(p - a, -a_t$

Bundan:



36-chizma.

$$\frac{tga_2 - tga_l}{\backslash + tga_t tga_2},$$

$_w$ va a, - Ox o'q bilan ва C_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak bo'lgani uchun $tga_x=k_}$, $^f g^a i^{=k} i$ bo ladi.

Shuning uchun:

$$= _6 \qquad \backslash + k,k_2 {}^{v\,7} \qquad (9.7)$$

Demak, o'zaro perpendikulyar bo'lmagan f. va to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakning tangensi (9.7) formula yordamida topilar ekan.

7-misol. y=-2x<3 va v=3x+5 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin. Yechish. Misolda A, ■■ -2, k_2 =3 bo'lgani uchun

^{s} l+(-2)-3 = ^21 -JL = _i й> = 135° kelib chiqadi. -5

Izoh. va (?, to'g'ri chiziqlar orasidagi o'tkir burchak formula yordamida topiladi.

$$\frac{k_2 - k_t}{1 + }$$

Faraz qilayiik perpendikulyar bo'lmagan to'g'ri chiziqlar va ($_2$ umumiy ko'rinishdagi tenglamalari $.4_j x + B,y + C_t = 0$ va $A_2 x + B,y + C, = 0$ yordamida berilgan bo lib ular orasidagi <p burchakni tangensini topish talab etilsin. U holda to g ri chiziq tenglamalarini y ga nisbatan yechib ^{to} g ri chiziqning burchak koeffitsientii tenglamalariga ega bo'lamiz. (9.7) ga

A. ---L va A, = --2.
Z>', , Б,

q'ymatlarni qo'yib soddalashtirsak

hosil bo'ladi. Shunday qilib
chiziqlar orasidagi burchak tenglam

$$\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2} \quad (9.8)$$

alari yordamida berilgan

formula yordamida topilarek»

8- МИСОЛ. 2x-3y+5>0 " 5-'- >' + 9,<> to 8 ti chiziqlar orasidagi

t0□ilS Yechish. Misolda.^-3-* = 5, <*»> «abinoan:

_ N2L.LL3! = 12 =] ^ = 45°. WJ>(-3)-(-1) 13

9 8 Ikki chiziqning parallellik sharti

Faraz qilaylik to'g'ri >**r P»™"*1 bo,lsi„, U holda to'g'ri chiziq o'q bilan bir xil burchak*1 eBdl, >a u ' n . , ,, *k*, (9.9) bo'ladi

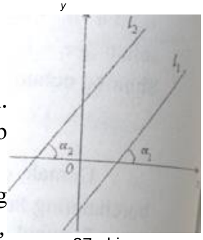
bo ladi. Demak *tga, =tga: w[* ,

.... , л He Isa a. = a, bo lib f.

Aksincha, agar $k_t=K_t$. 2 . 1

va f. to'g'ri chiziqlar p>bo,ladl yoki ustma-ust tushadi. Ustma-ust tushuvcH'g'H chtzrqlarn. parallel sanab quyidagiga ega bo'is*£

Ikki to'g'ri chiziqnin? PalaUel bo Jtsht uchun ularning burchak koeffllsi* bo llsh, zarur ™ yetarlidir. (37-chizma). ,



37-chizma

, . .

9- **мисол.** 2x + 3y-I'JSa 4* + 6^-3 = 0 t0 g n chiziqlar parallelmi? **Yechish** To'g'ri i^arni tenglamalari umumiy ko'rinishda ben..

Ularni *y* ga nisbatan ye* ,0,8,ri chi7al, W^alanm burchak koeffi., tenglamalar ko'rinishigal*1,7, з'л + з' >'~'зx + 2'

k _2 ^o,|(,tf!idiun to'g'ri chiziq parallel .

9 9 Ikki t^chiziqning perpendikulyarlik sharti

f. va *t.* to'g'ri chi^rPendikuiyar bo,lganda (9,7^ va(9,8) .

?' 2 , ,, ,x Staling uchun bu holda ikki to'g'ri chiziq oi®'

ma noga ega bo Imayu . & o KI

burchakni kotangensini',iZ: , , I + * .*, '»

- « t) s

iga, - tga} k, - k_t

ctg<p = ctg~=0 bo'lgani sabaW

2 -

A_t .4, =-l. Aksincha,

ar ekanini ko'rsatish mumkin.

'^'to'g'ri chiziqning perpendikulyar

= h" (WO Hhar^ L ^ vayetarlidir.

. ------------ L-i.

Perpendikulyar to'g^lar uchun

LtA±.-0, bundan

$k_1 \cdot -k_1$

to'g'ri chiziqlar perp<

$k.k$

даar to'g'ri chiziqlar umumiy ko'rinishdagi $A_t x + B_x y + C_(= 0$ va
=0 tenglamalari yordamida berilgan bo'lsa, to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti

$k.$— •— =-1 yoki Л,Л$_2$+ £,#,= 0 (9.11)
B, B-,

ko'rinishga ega bo ladi. .... .

10- misol. 3x-2jy + 13 = 0 va 2x+3^-4 = 0 to'g'ri chiziqlarlar perpendikulyarmi?

Yechish $A_t = 3$, $B_t = -2$, $A_2 = 2$, $B_2 = 3$ bo'lgani uchun $A_t A_2 + B_t B_2 = 3\cdot 2 - 2\cdot 3 = 0$ bo'ladi. (9-11) perpendikulyarlik sharti bajarilgani uchun to'g'ri chiziqlar perpendikulyar.

Mustaqil yechish uchun mashqlarva test savollari

I ^=^+16 to'g'ri chiziq 0.x o'qni qanday burchak ostida kesib o'tadi? Javob: ^-45°.

2. To'g'ri chiziq M(3;-2) nuqtadan o'tib *Oy* o'qdan *b=4* kesma ajratadi. Shu to'g'ri chiziqning tenglamasi yozilsin. Javob: y-2x+4.

3. To'g'ri chiziqlar chizilsin: 1) 2x+j/-6=0; 2) x-3y+6=0; 3) *2x-y^0;* 4) x+3y=0;

5) x-3=0; 6) 2x+5=0; 7) 2j/-5=0; 8) y+3-0.

4. To'g'ri chiziqning:

l)x-y-3=0; 2)2x-3y+l=0; 3) 2x-3y+4-0; 4) 3x+2y-0; 5) 2y+ 7-0 tenglamalari burchak koeffitsientii tenglama shaklida yozilsin.

Javob: 1) j=x-3. 2) = —x + -. 3)y = —x + —. 4) *y-—x. 5)y--~.* 7 '
33 3 3 2 2

5. To g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin:

' 3' = —x + 3, y = 3x-2. 2) y = 3x+l, jy-3x-7. 3)y-3x-2, }» = --.r + 5.

4) 2x + 3y-3 = 0; 4x + 6y + 7 = 0.5)v3x-y-4 = 0, V3x-3j+-2 = 0.

6) — , X *y*
12 3 = '25~T5 = k 7)X + 4T + 2 = 0; 2J' + 3 = 0-

Javob: I) 45-; 2) 0; 3) 90°; 4) 0; 5) 150°; 6) 135°; 7) *tg<p* = 1.

b. y = 2x + 9

E a _y = 3x + 4 to'g'ri chiziqlar orasidagi o'tkir burchak topilsin. avob: «> = arc/gl

Uchburchaknino x ? a" banic^a 2x-5p-20=0 to'sr'ri chiziq bilan chegaralangan 8 K^anX^b г?1"' JaVob: ^0 kv. bil l.

^'4tasigac|1a j'11 dn = v-^-2-0 vax.4y-19=0 to'g'ri chiziqlarning kesishish
? = x'2to'Xhi2Pn'n\JaVOb: 5uz bi,L

10 A* oo B> 30" г>\ 'Ч_.,Л 0 q blla!1 nec|tagradus burchak tashkil etadi? 4x+s>^=ovat; E) 6oo F) 9oo-

A) ^~2) B) fl. ?

U*'2 \ 2'V 6 0 to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi topilsin. J DH'2;-2)

E) (4;2) F) (0;-3).

H- K_{Wa}|ar boshi >,amda nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq te$_n$g]arwl topilsin

B)y + 2№° D) E) y---3x F) y = |x+2.

12. 2лз$_{Гг1}$;-o to'g'ri chizi 4 (2,3) nuqtadan o'tsa, uning tenglamasiga. koeffjjen^naga teng?

Агз 3)12 f))J2 E) 14 F) -13.

13. va x-^ + 9=0 to'g'ri chiziqlar orasidagi kichik burch; toping

A)y 3)30" D)45" E) 60" F) 90".

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1 pj'°'n chizkl'ar orasidagi burchak nima?
2.9'q bilan to'f' °hiziq orasidagi burchak nima?
3.ft'g'ri chizi<l ten g |amasi nima?
4.IH'g'ri chizi^ing burchak koeffitsientii tenglamasi qanaqa?
5.re'g'fi chiz^^ um umiy tenglamasi qanaqa?
6.ft'g'ri chizifl'an y n S kesishish nuqtasi qanday topiladi?
7.ftnglamasig^ko rato g ri chiziq qanday yasaladi?
S.llki to'g'ri ch'zi 4 orasidagi burchak qanday topiladi?
9.p'g'ri chizi^an y n g P ara II e 4 l< va perpendikulyarlik shartlarini ycBsazk
lOynalitik geoi^oy'sning asoschisi kim?

IQ. MA U—' Mavzu: To'g'ri chiziq tenglamalari

l.ergm tengl^gi nuqtadr o'tuvchi va ma'lum yo'nalishga ega to'g'ri cslihiq
2er:can tengk-asf
3erl$n nuqtaga chiziga ^ynasi. o'tib berilgan to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri
^oyii chiziqlar^ 38 *-,
-'origin ikki nu^o'tib nuqtadan berilgan to'g'ri chiziq tenglamasi, chiziqqa perpendikulyar chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi.
V/ri chiziqnH 110›nial tenglamasi.
fa'f'ti chiziq tet$aniasini normal ko'rinishiga keltirish.
Wjdan to'g'richiziqqacha rnasofa.
IMijethvr: 3,5,*'^' <|.s
^aidi iboralat t0 2 r* chiziq, burchak, burchak koeffltsient, paга1и^?г perpej^inarlik, ten^ama' ^asta, dasta markazi, og'irlik markazi, n^H ten gl?a.'icrmallovch<

|jj. Berilga#nuqtadan o'tib ma'lum yo'nalishga ega to'g'ri chiziq tenglamasi

To'g'ri chiziqning buterchak koeffitsienti κ ma'lum va to'g'ri chiziqni ($_{v\ v}$) nuqtadan o'tishi anisniq bo'lganda shu to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz.

To'g'ri chiziqning burchi<iak koeffitsientii tenglamasi $y=kx+b$ (9.1)

j yozamiz. Bu yerdagi κ ma'lum son b esa noma'lum. b ni to'g'ri chiziqni nuqtadan o'tish sHWiartidan foydalanib topamiz. Л/^Xpy,) nuqta to'g'ri $_{ch}$jziqda yotganligi uchun uruning koordinatalari to'g'ri chiziq tenglamasi (9.1) ni nanoatlantiradi, ya'ni

4

$$y\text{^-}kx_x+b.$$

Bundan

$$b=y_x-kx_x$$

b ning topilgan qiymatini to'ggg'ri chiziq tenglamasi (9.1) ga qo'ysak

$$y=Ax+y_rAx]$$

yoki

$$y\text{-^-}y_{\}}=k(x-X\backslash) \quad (10.1)$$

hosil bo'ladi. Bu berilgan nuqlfltadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi deb aytiladi. **l-misol.** Berilgan /1(3;-! 'Ll) nuqtadan o'tib Ox o'q bilan 135° burchak tashkil etuvehi to'g'ri chiziq tenglanrrnasi yozilsin.

Yechish. cr = 135° , A=/g^gl35°=/g(90^0+45^0)=-crg45^0=-l, X|=3, y--l bo'lgani uchun (10.1) ga binoan y+1 ^-(x-3) yoki y--x+2 kelib chiqadi.

10.2. Berilgan niMMiqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa parallel o'tkaaezilgan to'g'ri chiziq tenglamasi

^i(*gTi) nuqta hamda y^-^Ax+b to'g'ri chiziq berilgan. Shu nuqtadan to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazilgan tcrto'g'ri chiziq tenglamasini topish talab etiladi. (10.1) formulaga binoan izlanayotgarr*n tenglama

$$y-yj=/q(x-xi)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yts^/erdagi noma'lum k_x ni to'g'ri chiziqlarni parallellik shartidan aniqlaymiz. Parallel 111 Uik sharti (9.9) ga binoan $k\backslash=k$ bo'ladi.

Demak

$$y\text{-j-^jq-^X-X!).} \quad (10.2)$$

Bu berilgan nuqtadan bciberilgan to'jri chiziqqa parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

2-niisol. -v/(_2:3) rrrinuqtadan 2x-

5-0 to'g'ri chiziqqa paralleJlel o'tkazilgan t0 g ri chiziqning tenglanri masi yozilsin.

1eпe1aтГ-a'XЬ' To›S›ri H Chiz›4

chia d' aS*dan ^'-x+5 va ekani kelib

«a ko'ra bo'lgani uchun (10.2)

kelib chiqadi 3‹‹2(X+2) YOki ‹‹ У=2X+7

ЮД Berilgan nuqtad^an berilgan to'g'ri chiziqqa perpendiku^ o'tkazilga^n to'g'ri chiziq tenglamasi

Berilgan Л/Д;?,) nuqpqtadan berilgan y g.ri chizi

perpendikulyar o'tkazilgan to'g'/n chiziq tenglamasini topish talab etilsin (W, binoan izlanayotgan tenglama

y-yi=Ai(x-*i) bu to'g'ri chiziq berilgan to'g'ri perpendikulyar bo'lgani uchun

bo'ladi. Ikkinchi tomondan (t^9.1O) ga asosan A-A, --1 yoki A, - ~'\

(10.3)

Demak

Bu tenglama berilgan nuqt^|tadan berilgan to g ri o'tkazilgan to'g'ri chiziq tengla^masi. chiziqqa perpendikuh

3-niisol. AY(-1;1) nuqtd^ac^an 3x-yi-2-0 to g ri o'tkazilgan to'g'ri chiziq chiziqqa perpendikuh tcnglan-ftnasi topilsin.

YechiM,. Izlanayotgan burchak koeffitsientni k,. benlgan bUKhi koeffitsientni k_2 desak y=-3xH*2 tenglamadan $*_2$=3 kelib chtqadt. perpendikulyarlik shartidan $3k_1$^t='l. bundan k_t --- hosil bo ladi. (10-3) izlanayotgan tenglama

yoki *3y-3—x-У; x+3y-2* 0

b"Лtmisol (2; -1) nuqtadan ■ o'tib 5z-2yH0=0 to'g'ri chiziq bilan 45« batch tashkil etuvehi to'g'ri chiziq ten^tg,lamasl l0P'lsln-. i.,„,ff,i«i»ntini <5

Yechish. Izlanayotgan to'g'ri chiziqni burchak koeffitsientni! ft formulaga binoan axtaramiz.

Berilgan to'g'ri chiziq tenglam^f asini y -x + 5 ko'rinishda yozsak uning 2 koeffitsienti к - ekani kelib o chiqadi. Shartga binoan to i'g'ri chiziqlar orasid koeffitsientni A, deb belgilasak I* burchak tp-45''. Izlanayotgan * burchak formula

$$/g45'' \quad \frac{A - \frac{5}{2}}{1 + '' \frac{A-}{2}}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bundan fh

1-------I. y^j |+5 A =A 5/2 -A, = -2*1, 2A, =-2; A,=~^ bo'ladi.

14.St, 2 1 1 2 2 2 - 2 - 3

2 ' Shunday qilib (10.1) ga bimnoan izlanayotgan tenglama

$$y_3 + 1 \frac{\quad}{} 25?(.v-2) \text{ yoki } 3y + 3 = -7x4-14,$$
3

bundan 7,+3^-H = 0 bo’ladi.

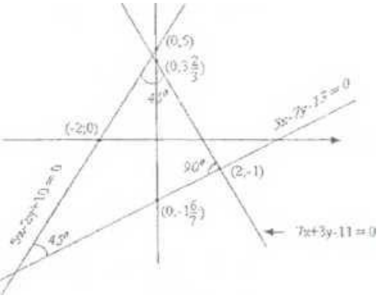
A^arda Л.^ = 45° deb olib (9.7) dan k, ni topsak bo’ladi. Bu

3

holda izlanayotgan tenglama (10.1) ga binoan y + l = -(x-2) yoki 3x-7y-13=0

□emak masala ikkita yechimga ega ekan.

To’(,’r' chiziqlarning har biri berilgan to’g’ri chiziq bilan 45° burchak tashkil et^anligi sababli ular o’zaro perpendikulyardir (38-chizma).



38-chizma

10.4. To’g’ri chiziqlar dastasi

1-ta‘rif. Tekislikning M nuqtasidan o’tuvchi va shu tekislikda yotgan barcha to’g’ri chiziqlar to’plami to’g’ri chiziqlar **dastasi** deb ataladi.

Bunda M nuqta **dastaning markazi** deyiladi.

Berilgan M^x,-,y^ nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasi

y-^]=^U-Xi) (10.4)

ni qaraymiz. Bu yerdagi burchak koeffitsient κ o’zgarsin. U holda κ ning har bir aniq qiymatiga M^x^,y^ nuqtadan o’tuvchi aniq to’g’ri chiziq mos keladi. Aksincha abssissaiar o’qiga perpendikulyar x=X| to’g’ri chiziqdan farqli barcha to’g’ri chiziqlar aniq κ burchak koeffitsientiga ega bo’lib u (10.4) tenglama yordamida aniqlanadi.

Shunday qilib κ burchak koeffitsient istalgan sonli qiymatni qabul qilganda (10.4) tenglama x=xj to’g’ri chiziqdan farqli markazi nuqtada bo’lgan to’g’ri chiziqlar dastasini tenglamasini ifodalaydi.

5-misol. Markazi /1(2; -3) nuqtada bo’lgan to’g’ri chiziqlar dastasining tenglamasi yozilsin. Dastadan Ox o’q bilan 60!) burchak tashkil etuvehi to’g’ri chiziq ajratilsin.

Yechish. X|~2; yi=-3. (10.4) ga ko’ra dastaning tenglamasi y+3=£(x-2) bo’ladi. Shu dastadagi to’g’ri chiziqlardan Ox o’q bilan 60° burchak tashkil etuvehi to’g’ri chiziqning tenglamasini tuzamiz. a = 60°, κ = /g60" ~ 7з bo’lgani uchun dasta tenglamasidan y + 3 = ^3(.v-2) yoki y = y/3x-(2y/з + 3) tenglamaga ega bo’lamiz.

10.5.Berilgan ikki nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasi д/^x^y,) va 'W’(-x,:y3) nuqtalar berilgan bo’lib, shu nuqtalardan o’tuvchi to’ > • chiziq tenglamasini tuzish talab etilsin. Shartga ko’ra to’g’ri chiziq У/(x. nuqtadan o’tganligi uchun uning tenglamasi (10.4) ga ko’ra

$$y-y_1=k(x-x_1)$$

ko’rinishga ega bo’ladi. Bu yerdagi к noma‘lum. Uni topish uchun to’ > • chiziqning УА(x,;y>) nuqtadan o’tishi shartidan foydalanamiz. A/,(x,;v,) n - to’g’ri chiziqda yotganligi uchun uning koordinatalari shu to’g’ri ch ’• tenglamasini qanoatlantiradi. ya‘ni' l2l9

$$У1 - У1 = k(x, - x.).$$

Bundan

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

A ning ushbu topilgan qiymatini to’g’ri chiziq tenglamasi _y-yi=A(x-xt) ga qo’ySa)(

У~У> = -" ---- L(x-x,) .

.г, -Л-,

yoki buni $y_2$ga bo’lsak

-U--\ У2-У>

tenglamaga ega bo’lamiz.

Demak (10.5) berilgan ikki nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasidir. (10.5) da *x,* **x2,* y, * *y,* deb faraz qilinadi, aks holda u ma’noga ega emas. Boshqacha aytganda to’g’ri chiziq koordinata o’qlarining hech biriga parallel bo’lmagan holni qaradik. Agar A-, = x, bo’lsa to’g’ri chiziq *Oy* o’qqa parallel bo’lib. **uning** tenglamasi x = x, bo’ladi. Agar y,=y, bo’lsa, to’g’ri chiziq Ox o’qqa parallel bo’lib uning tenglamasi y = y, bo’ladi.

Izoh (10.5) tenglama to’g’ri chiziq koordinata o’qlarining birortasiga parallel bo’lganda ham yaroqli.

U holda (10.5) dagi qaysi kasrning maxraji nolga teng bo’lsa uning suratini ham i nolga tenglashtirish kcrak xolos.

6-misol. Uchlari Л(2;3), Z?(-l;4), C(5;5) nuqtada bo’lgan uchburchakning og’irlik markazidan uning *AC* tomoniga parallel o’tkazilgan to’g’ri chiziq va undan UZ? tomoniga perpendikulyar o’tkazilgan to’g’ri chiziqlar topilsin.

Yechish Uchburchakning og’irlik markazi V ni topamiz. I

uchburchak og’irlik markazining koordinatalari uning uchlarining nom koordinatalari ning o’rta arifmetigiga teng. ya’ni uchlari A(x,;.V|)> j

C((л;.1.) nuqtalarda bo’lgan uchburchak og’irlik markazi M(x. ; yf) koordinatalari

X] + x, + x, v, + y, + y,

Д- - ---- S----— v - Д----—=-—

‘ 3 r 3

formulalar yordamida topiladi.

Biz qarayotgan holda

x =2 + (-1) + 5=2 , ye 3 , _ 3 + 4 + 5 3 va Л/(2;4).

Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi (10.5) ga asoslanib uchburchakning *AC* va *AB* tomonlari tenglamalari topiladi. (10.5) ga *A* va *B* nuqtaning koordinatalarini qo'ysak

——— = —- yoki y-3=~———bo'ladi.
1-2 4-3 3 ' ■

2 12A'

Bundan *AB* to'g'ri chiziq tenglamasi y = -| + -- + 3 yoki y = --x+3j ga ega bo'lamiz.

Shuningdek (10.5) ga A va C nuqtalarni koordinatalarini qo'yib AC tomon tenalamasini topamiz:

= yoki = >z2.
5-25-3 3 2

Bundan y-3 = |(x-2) yoki y = + j ga ega bo'lamiz.
э 3 3
2 5

parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz: x_1=2,^i=4, A=| bo'lgani

(10.2) ga asosan Л7(2;4) nuqtadan y = -x + - to'g'ri chiziqqa *(AC* tomonga) uchun y-4 = -(л-2) yoki 3y-12~2x-4 va bundan 2x-3y+8-0 *AC* tomonga parallel to'g'ri chiziq tenglamasi kelib chiqadi.

Endi (10.3) dan foydalanib AY(2;4) nuqtadan uchburchakning *AB* tomoniga o'tkazilgan perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz: X[-2, ,yi=4, k=-1 ekanini hisobga olsak y-4=3(x-2) yoki y=3x-6+4, bundan *y-3x-2* bo'ladi.

10.6.To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi

Faraz qilaylik to'g'ri chiziq koordinata o'qlarining hech biriga parallel ■*h* kesmalar bohmasdan u Од- o'qdan *OA~:a,* Oy o^qdan ajratsjn

O_B=> ,, . U holda to'g'ri chiziq A(a;o) va B(o;bj i n U.5ta,ar<^an o'tishi ravshan. Shuning uchun ' l.
nu4tadan o'tuvchi to'g'ri chiziq ; gamasi (10.5) dan foydalanamiz: ;

Ли°' =0? bo'lgani uchun!
oZ7, = 7—- yoki -v .. v
л-о yoki bundan
/)

Afa.-O)
\ x
t)

(10.6) «j^:Bu ten glama t0 7,Mlso l

39-chizma

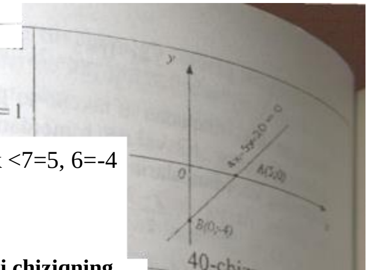
I

4x-5^-20=0 **'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi** to'g'ri chiziq chizilsin.

Yechish. To'g'ri chiziq tenglamasini kesmalarga nisbatan yozamiz: 4x-5y=20 yoki 20 ga bo'lsak — = 1

20 20

va bundan y + -^- = i kelib chiqadi. Demak <7=5, 6=-4 (40-chizina).



40-chizma

10.7. To>g'ri chiziqning

,

haraz qilayiik to'g'ri chiziq £ + Z =] te · * asi

a b cnglam$_a$ огчаИ berii koordinatalar boshidan o tmasin (41-chizma). To'^Ti ch' o'tkazib uning uzunligini *p*. *OP* perpendikulyar

a orqali belgilaymiz. *p* to'g'ri chiziqning *OP*

Chizmadagi ЛАОР dan — = cosa;

OA

——, chunki cos a

OA=_2L = *P* .

cos a cos6z

a =

OA = *a*, *OP* = p-

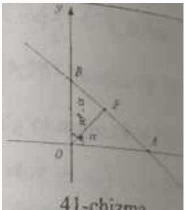
дОВР dan *OP* –cos(90-<z) .=

OB ~

OB=— *P* chunki

sin *a* sin a

OB = *b*, *OP* = *P*-



41-chizma

bilan o''4,,0" Игре,.

normali det.ataladi

ci va *b* ning ushbu qiymatlarini to'g'ri chiziqning tenglamasigac + -[1] 1 yoki

.rcosa + ysin« = *p ;* .vcosa + ysina-p = 0 (10.7)

kelib chiqadi. (1**0.7)-to'g'ri chiziqning normal tenglamasi deb ataladi**

To'g'ri chiziqning normal tenglamasini o'ziga xos xususiyatlaridr undagi /> > 0 va $\cos^2$a $r\sin^2$a = l.

■

10.8. To'gri chiziq tenglamasini normal ko'rinishiga keltirio

To'g'ri chiziq umumiy ko'rinishdagi tenglamasi J

yordamida berilgan bo'lsin. Shu tenglamani (10.7) ко rinis .

tenglamaga kcltirish mumkinligini ko'rsatamiz. **Shu maqsadda (** si.i.ndus o'/^oma.-sui. i/ ga ko'pay timmizki natijada

A7,Tx+/W^/WC=0 (Ю.8) ^$_{nglania}$; I/ '

to'e'ri chiziqning normal tenglamasi bo'lsin. Buni norma - |amu- гл$_1$A iiiii'a id'',01 D

L-d taqqoslao 0 .*1* / Л'-мпа. A/-(*P* *P' CRt »* ~ g yerdaS[1] '

tenglamadan V/. *p* noma'lumlarni aniqlash qiyin enia 4 ikkita tenglamani kvadratga ko'tarib hadlab qo shsak]

M I • t/ '/V - cos'a - $\sin^2$ar = к A7'(/l+#) - j-+ *B*

bo'lib bundan *i\ f* -—. (10.9)

$\pm\sqrt{1^2 + B^2}$

,,. to-naytuvchi deb ataladi. (10.9) da ishora ozod AZ nl»S qiqn,W 7»

HC ^^TaZlarnianiqlashntuntktn:
«•'J»"**' "
sina = ? —''= .p), 77,)'
•X .J— boshidan AA-B.0 c-o toVfi chiziqqacha ,,tasofit
Shunday 4" |c| ПО 10)
P=Ж?

ri chiziq tenglamasi normal ko'rinishda yoziisin.
8 n,Msh 4-6 B=S. C=-5. Normallovchi ko'paytuvchi:
v--U== = 4; (c<0)- M'4e2 +i2 10
Berilgan tenglamani bunga кo paytirsak
yoki -x + -y-- = 0 normal tenglama hosil bo'ladi.
ioX'ioY io" 1 5 5 3 2 4
Bu to'g'ri chiziq uchun cosa = ^> s,,la ‹‹ •

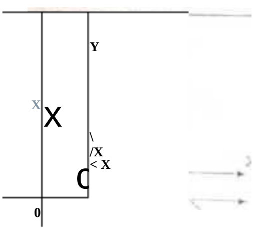
10.9. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha rnasofa

Aytaylik, $Q(x_0;y_0)$ nuqta hamda A.r+By+C=0 to'g'ri chiziq berilgan bo'lib. Q nuqtadan to'g'ri chiziqqacha *d* masofani topish talab etilsin. Nuqtadan to'g'ri rnasofa deyilganda undan to'g'ri chiziqqa o'tkazilgan perpendikulyarning uzunligi nazarda tutiladi. *Qxy* sistemani parallel ko'chirib koordinatalar boshini Q nuqtaga joylashtiramiz.

U holda

_ ______________________ t pohb X = A' +
to'g'ri chiziq tenglamasi" yangi lx X0J ?'=/ +
sistemaga nisbatan quvidam ko'nmshga
ega bo'ladi:_______________ ' °
X»«T+ЛHC=0 >'oki ; x » Ь o''вЛ+C)=O.
cb.a,\;f'4ebbd&'^
i bo'ladi. (

, _ to'g'ri
bo'ladi. o-0 tenglamaga ega



I

42-chizma I

4 amasota <l0'0) romwk ' •shi bo'lganligi uchun undan la yordamida topiladi:

d = — JSiL
"Undan c — . /73 ~ '
0 ^-vo+/?Vo+C pL-a r •
eka,ll'gim hisobga olib

J rz 1ЛЛо + *B*У» +С1

уГ^Т/г- (1 1 I) formulaga ega bo'lamiz. Bu formula **nuqtadan to'o' • topish** formulasi. ъ ri cfl, **ziqqa .**

9-misol. M(-5; 2) nuqtadan 4.x-3y+l4=o to'gY k

Yechish. xo^.^г, A=4, M.OM bo'lgani „3^

, Н-5н<-з>22И₌ЫI s 1 ' »> b«»i \'4' + (—3)2 "'ч.

5 5 -3.6.

Demak d-3.6 uz.birl.

10- misol. 3.v+4y-12-0 va 3.v+4yH3=0 parallel to'g'ri v • rnasofa topilsin.

Yechish. Izlanayotgan masofani topish uchun birinch' I 1 istalgan nuqtasidan ikkinchi to'g'ri chiziqqacha masofani Г'8^- chlZ:-' tenglamada x 0 desak y-3 kelib chiqadi. Demak Q(0'3) n oPam,Z, 9lr, chiziqning nuqtasi. (10.11) formuladan foydalanib chiziqqacha d masofani topamiz. " Лг" '

:7_|3 0 + 3 4 + l3| 25

7з2 +42 5 ~ '

Demak d-5 uz.birl.

11- **misol.** Uchlari Л(4;3), £(16;-6), va C(20;16) nuqtalarda bu. uchburchakning CD balanligi topilsin.

Yechish. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi (10.5) ga asosla AB tomon tenglamasini topamiz. (10.5) ga *A* va 5 nuqtaning koordinatair

> i .v-4 y- 3 л-4 л' y-3 x-4 y-3 , ,n_a n
qo ysak ------------ = — -----• ---- ₌ Z_—_• ------ = z—; -3x+12-4y-12 ■
16-4 -6-3 12-9 4-3

3x+4y-24 -0 - .1Л tomon tenglamasi hosil bo'ladi. *CD* balandlikni nuqtadan.- chiziqqacha masofani topish formulasidan foydalanib topamiz. (10.11) ga *<f r,.r 16. A-⁻3, B 4. C -24 qiymatlami qo'ysak

13 20 + 416-241 100

J = ' ---- f .■== ---- 1 = — = 20 bo'ladi. Demak d-20 uz.birl.

y/j² + 4Г

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test **save**

1 nuqtadan 3v-4v-l6-0 to'g'ri chiziqqa para e chiziq tenglamasi topilsin. Javob: 3л-4y+14-0. . idikulyar·1jikulyar○^i

2. .1(5;-1) nuqtadan 3x-7y* 14~0 to'g'ri chiziqqa perpe to'g'ri chiziq tenglamasi topilsin lavob: 7Y+3.v-37-O. o'q

3. .1(3;4) nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastas1 л-м- ■ burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi topilsin. ^ ^ighish nU^

4. д-i v-l-O va 2л ьЗу+4"0 to'g'ri chiziqlarn1,1.^ c^jziq t.

1) 3A'-I'+7- 0 to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o tkazj •'^.^д tenglarn8S

2) shu to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazilgan to g n Javob: 1) v• 3i • I 1 0; 2) 3л-г-27-O.

,04 va t-1-5) nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa $_c$-3)
nuqtadan (t engi amas i topilsin. Javob: 7x-2y-20-0
ilelodkazilganto g;\cniZ4 2•1} nuqtaiardan o'tuvchi to'g n chiz)qqa (|:2) nuqtadan <4›3)
, j chjzjq tenglamasi topilsin. Javob: 3.x ■ V-5--Q.
lendikulyar o›tkaz ,lga"hi 15л_4y-1=0 to'g'ri chiziq bilan 45° burchak tashkil "“'“SXg
—!ari top.fs.n, Javob: 9.v ■ v-30^0. ,-9r 24-0. qi|uvchi tog n c"'f j va C(l;2)
nuqtalarda bo'lgan uchburchakning
' 8 \ 1'uzunbklar' hamda ichki burchaklari topilsin.
tomoniarini « { 2
Javob: I: 7S;V5,I35";^«-, пгед--.
lari va-3v-2=0, 2x+y+5=0 va 3.V-4--0 tenglamalarga ega bolgan uchburlZni balandliklarining tenglamalari topilsin. Javob: 5v-9-0; 9.r-l 8v-8-0;

91u'hlari (0'1) (1;°) va (1;1) nuqtalarda bo'lgan uchburchakning medianalarini tenglamalari topilsin. Javob: y*2x-2=0, *x+2y-2=0; y=x.*

11 a) 3x+4v*15-0; b) 6л-8y-9=0; d) 2*+2V3j<7^0; e) .x-qy+5 0 to'g'ri chiziq tenglamalari normal ko'rinishda yozilsin. Javob: a)-|x-4y-3 - 0;

d)r+T^r0;c)

12. a) 4x-6y+7=0 b) |.v-|^-5 = 0; d) 4 л-4 y - 4 0; eЛ-2, ь- 0 -x--y+6 = 0; tenglamalardan qaysi biri to'g'ri chiziqning normal tenglamasi. Javob: d).

Va4^-7-○ -S'-a'a'Saega. Umng

««)k ai Po,ra"el !○.g›ri Chizi<"ar ^“agi masofa.,dan iborat. topilsin. Javob A” ■
y Ч,a1aГ<1aП bir XH -“Slikda joylashgan .0 nuqta
A 6'6 ■ Ko'rsatma. = .
[BD = CD sistema yechib topiladi.

v

^"'lardan qavsi b-■ 7" ' "3)2 V '■ 4C' ^3 sj. .
<• btr, berilgan n,,qtadan

16 Oldin 8)2 D) 3 E) 4 F) 5

....

■v + 7-0 to g n chiziqqa parallel o'tkazilgan to'g'ri

■3 У ~ 2x-3 p)

A) 3x - y + 11 = O B) У = -3x + 11 D) у =5н^ *y* '^^*ri chi*^*qqacha* masop

18. Koordinatalar boshidan 3x + 4y—5

A) 2 B)3 D)4E)5F) 1. " •ос g *ri c*|

.fr~T~,2r +

6 = o to’, *£»,%o-^+« 3 ,3^ 73=0*

19. Quyidagi tenglamalardan qaysi

normal ko’rinishdagi tenglamasini ifodaflaytf ,

A4 5 12 6 n D\ 5 12 «

A) —x-r—v— = 0 B) —x—

13 13' 13 13 13 B ш

-X--V + 2-0 F) to’g’ri javob keltirilrraag® °У °’Чча *parallel to’gVi*

9 3 *j®!* *

20. y-2 = A(x-3) to’g’ri chiziqlaff da'as,,nV

ajratilsin. yrtitf^bo'taaydi.

A)x=3 B)x = 2 D)x = 4E)x - 'savo||ar

O’z-o’zini tekshirish bn yozing.

I .Berilgan nuqtadan o’tuvchi to’g’ri c ,z,4 teng/amasinj y_0-

2. Nuqtadan to’g’ri chiziqqa parallel o'tkasl^0’^»aziM * -*,f) to g ri chiziq teng|aj^

3. Nuqtadan to’g’ri chiziqqa perpendfikuhir.^j* ?

yozing.

4. To’g’ri chiziqlar dastasi, dastaning m®a •

5. Dastaning tenglamasini yozing. Длги . ,

6.Ikki nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziq ^O2,ng-

7. To’g’ri chiziqning kesmalarga nisbatai t

8. To’g’ri chiziqning normal tenglamasini *wishga keltiriladi.*

9. To’g’ri chiziqning tenglamasini Qiand^i. 0/

10. Normallovchi ko’paytuvchi niina? :

II .Koordinatalar boshidan to’g’ri *chiK^a ‘

12.Nuqtadan to’g’ri chiziqqacha ronasofe ц_гпа^ги^х 3Mavzu: Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

Reja: ... ,

I Ikkinchi tartioil egSRri chiziqlar haqida tushuncha.

2_ду1апа va uning ksanonik tenglamasi.

3. Ellips va uning kae^onik tenglamasi.

4. Giperbola va uning^ kanonik tenglamasi.

s.Parabola va uning ^Kanonik tenglamasi.

6. Ikkinchi darajali algebraik tenglamalar yordamida aniaL chiziqlar haqida. dn,4^nadigan

7.Ikkinchi tartibli egxrj chiziqlarni qo'llanilishi.

8. Ikkinchi tartibli egiri chiziqning qutb tenglamalari.

Adabiyotlar: 3,5,8,10^] 1J5J6.

Tayanch iboralar: ^y|ana, ellips, giperbola, parabola, markaz fokus, yarim o'q, fokal o simmetriya o'q, ellipsning uchlari, haqi'C1: ,
mavhum o'q, giperbolaning ujchi, direktrisa, parabolaning parametri, ekssentf ◦ 4,

11.1 Jkkinclwi tartibli egri chiziqlar haqida tushuncha

1- ta'rif.

d-v- + eA7-t<5,'+jDA-+£y + F = o (ll.l) ko'rinishdagi **te ikkinchi darajali algebraik ttenglama** ama deb ataladi.

Bu yerdagi *A*, Ъ Ama'lum sonlar bo'lib ulardan *A, B. C* bir . nolga teng emas. Aks holda, ^a'ni Л=5=C=0 bo'lganda (11.1) tenglama Vaqtda *Dx+Ey+ F=Q* ko'rinishdagi chiziqli (birinchi darajali) tenglamaga aylanadi va bu to'e'ri u- ■ tenglamasi ekanligini bilamiz^ 5 11 chiziq

2- ta'rif. Dekart koordinatalari *x* va *y* ra nisbatan ikkinchi darajali ale, к •, tenglama yordamida aniqlan^digan egri chiziqlar **ikkinchi tartibli** e«ri ch • .k deb ataladi (11.1) ikkinchi tartibli egri chiziqning **umumiy 1еп81атаГ1** deyib?

Ikkinchi tartibli egri chizaq|arga **aylana,ellips, giperbola va Parabolah^iradi**

. V*2* ^'lana va unin**g kanonik tenglamasi**

3- ta'nf.

Tekislikning berilgan nuqtasidan bir xil masofada joylashga , tekislik nuqtalanning geometrik 0>rniga ay|ana deb ata|adj ' shu

Tekislikning berilgan nuqtasini ay|ananjng markazi undan ay| masofani **aylananing radiusi** deb ataymiz J "^acha

, M±,7' * "' C' T* bo'lih radi''si R 8» avlananin» ten«la,,, . -

(43 -chizma). Aylananing ixtiyoriy nuqtasinj - "as,,,,

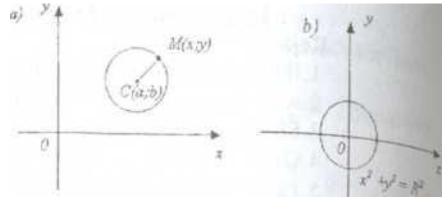
ta nfiga binoan: 'Mning

VC,-/?..

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi (1.2) dan foydalansak $>/(x - a)^2 + (y - b)^2 = R$ yoki bu tenglikni har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak

$$Fv \sim a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \text{ (Ц.2)}$$

kelib chiqadi. Shunday qilib aylananing istalgan /V/(x,_y) □uqtasining kooordi natal ari (11.2) tenglamani qanoatlantirar ekan. Shuningdek aylanaga tegishli bo’lmagan hech bir nuqtaning koordinatalari (11.2) tenglamani qanoatlantirmaydi. Demak (I' -2) aylana tenglamasi.



43-chizma.

(j aylananing kanonik (eng sodda) tenglamasi deb ataladi.

Xususiy holda aylananing markazi $C_j(a.b)$ koordinatalar boshida b'-0 bo’lsa bo’lib uning tenglamasi

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (11.3)$$

ko’rinishga ega bo’ladi (43^b-chizma).

Endi aylananing kanonik tenglamasini ikkinchi tartibli egri chiziqn $_0$ limuiniy tenglamasi (11.1) bilan taqqoslaymiz. (11.2) da qavslarni ochib ma‘lurn ^Imashtirishlarni bajarsak u

$$x^2 + y^2-2ax-2ay + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \qquad (11\text{-}4)$$

ko’rinishga ega bo’ladi. Buni (11.1) bilan taqqoslab unda x^2 bilan y^2 oldidagi ^ocffitsientlarni tengligini va koordinatalarni ko’paytmasi *xy* ni yo’qligini ko’iamiz, ya‘ni

$$A\text{^}C \text{ va } 5=0.$$

(11.1) tenglamada $A=C$ va 5=0 bo’lsa u aylanani tenglamasi bo’ladimi degan savolga javob izlavmiz.

Soddalik uchun $A\text{^}C=1$ deb olamiz. Aks holda tenglamani A ga bo’lib shuiicha erishish mumkin.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F\text{-}0 \quad (11.5)$$

tendamaga ega bo’laylik. Bu tenglamani hadlarini o’zimizga qulay shaklda o’rinlarini almashtirib to’la kvadrat uchun zarur bo’lgan —- va -- ni ham 4 4

qo'shamiz ham ayirimiz. U holda

$$x\sim + Dx \text{ ч} \frac{,}{4}\text{----h } y^* + Ey + \frac{D^2 \blacksquare> E^2\ D^2\ F^2}{4 \qquad 4 \quad 4} + F — 0$$

vo*i t_{ic}al bo’ladi. Mumkin bo’lgan uch holni qaraymiz:

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$$

1)-^{J}- + -— $F > 0$ (yoki $D^2 + E^2 > 4F$). Bu holda (11.6) tenglamani (1^3 ■
4 4 r

bilin taqqoslab u va unga teng kuchli (11.5) tenglama ham markazi O, -y- 2 nuqtada, radiusi $R = \sqrt{\frac{jo^2}{U} + \frac{E^2}{4} - F}$ bo'lgan aylanani ifodalashiga ishonch hosil qilamiz-

$' 4 + \frac{}{4}$ —— F = 0. Bu holda (11.6) tenglama

4- HJ

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglamani yagona koordinatalari qanoatlantiradi xolos.

3) —+ £-_F < 0. BU holda (11.6) tenglama hech qanday egri chiziqni nuqtaning aniqlamaydi. Chunki tenglamaning o'ng tomoni manfiy, chap tomoni esa manfiy emas.

Xulosa. (11.1) tenglama *A=C, B=G,* — + ~—*F>0*
4 4
bo'lgandagina aylanani tenglamasini ifodalar ekan.

1-misol. № + y^2 +2x-4y-4=o tenglama aylananing tenglamasi ekanligi ko'rsatilsin va aylananing markazi hamda radiusi topilsin.

Yechish. *A* **=C=1,** *B=Q,* + **= !^{2}+2^2 "(-4) = ^{9} >**

demak berilgan tenglama aylanani umumiy tenglamasi ekan. Tenglamani

$(x^2 + 2x + !) + (/ -4y + 4)-l - 4-4 = 0$ ko'rinishda yozib undan

$(x + i)^2 + (y-2)^2 = 3^2$ aylananing kanonik tenglamasiga ega bo'lamiz.

Shunday qilib aylananing markazi $0_t(-l;2)$ nuqta va radiusi R=3 ekan.

2-niisol. $x^2 -2x+v^2 + 2y + 4 = 0$ tenglama hech qanday egri chiziqni aniqlamasligi ko'rsatilsin.

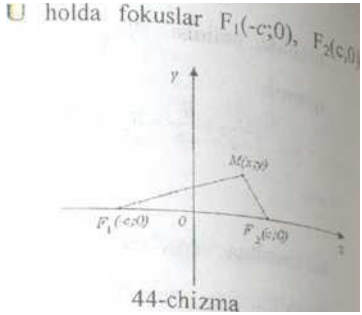
Yechish. Tenglamani $(x^2 - 2x+ !) + (/ + 2y +1) -1 -1+4 = 0$ ko'rinishda yozsak undan $(x-1)^2 + (y + l)^2 = -2$ tenglikka ega bo'lamiz. Koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiruvchi nuqta mavjud emas. Demak berilgan tenglama hech qanday egri chiziqni tenglamasi emas.

11.3. Ellips va lining kanonik tenglamasi

4- ta'rif. Har bir nuqtasidan tekislikning berilgan ikkita nuqtasigacha masofalarning yig'indisi o'zgarmas bo'lgan shu tekislik nuqtalaiining geometrik $^{0\ ril|}$ga ellips deb ataladi. **f** $_L$ tekislikning berilgan nuqtalarini F va F_2 orqali beigilab ularni ellipsning $^{\mathbf{0}}$ **uslari** deb ataymiz. Fokuslar orasidagi masofani 2c' va ellipsning har bir beKq^{S}∧$^{an\ un}$*^{n}§ fokuslarigacha bo'lgan masofalarning y ig'indisini *2a* orqali **va** F* $^{a\imath m\text{'}z}$: dekart koordinatalar sistemasini Ox o'qini ell.'psning fokuslari F,

2 orqali o'tkazib F| dan F_2 tonionga yo'naltiramiz, koordinatalar boshini esa

FıF$_2$ kesmaning o’rtasiga joylashtiramiz. koo rd i natal arga ega bo’ladi (44-chizma).



44-chizma

Endi shu ellipsning tenglamasini keltirib chiqaramiz. *M(x,y)* ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo’lsin. Ta‘rifga ko’ra M nuqtadan ellipsning fokuslari F; va F$_2$ gacha masofalarning yig’indisi o’zgarmas son *2a* ga teng, ya‘ni

$$MF_{\{}+MF_2=2a.$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi (1.2) ga ko’ra

$$MF_t = fix + c)^2+y^2,$$

bo’lgani uchun

$$MF_2 = fix\text{-}c)^2 + y^2$$

л/(x4-c)^2 + y^2 + *fix-cY* + y^2 - *2a* yoki

rc)^2 + y^2 = *2a* - *fix^fiy^* tomonini kvadratga R$_0$>tarip

kelib chiqadi.(x + c)^2+y^2 = *(2aY-2-2afix-c)*^{2} + y^2 + *(x-c)*^{2} + y^{2}',

Oxirgi

tengiikning ikkala ixchamlaymiz:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\ fix\text{-}c)^2 +\text{-}\ y^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2;$$

$$4cx - 4{<}7^2 - 4a\ fix - c)^2 + j?\ ;{<}?x = a^2 - a\ fix - c)^2 + y^2;$$

$$a^2 - ex - a\ fix - c)^2 + y^1.$$

Buni yana ikkala tomonini kvadratga ko’tarib ixchamlasak

$$a^4\text{-}2a^2cx+c^2x^2 = a^2[(x\text{-}c)^2+y^2];\ a^4\ \text{-}2a\text{~}cx + c^2x^2 = a^2[x^2\text{-}2cx + c^{:} + y^2];\ a^4 - 2a^2\ ex + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2\ ex + a^2c^2 + a^2y\ ';\ a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a' \text{-}a'c^2;$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2\ ({<}a^2 - c^2) \qquad (11\text{-}7)$$

hosil bo’ladi.

Uchburchak ikki tomonining yig’indisi uchinchi tomonidan katta ekanini nazarda tutsak *^F$_t$MF,* dan(44-chizma) MF$_1$+MF$_2$>F$_i$F$_2$; *2a>2c;* <7>c; я^2-c^2>0 (z?>0. c>0) bo’ladi.

6f^2-c^2~Zz^{2}deb belgilab uni (11.7) gaqo’yamiz. U holda $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b$~ yoki buni *a'h~* ga bo’lsak

--+^1 (11.8)

J :^Ц kelib chiqadi. Shunday qilib ellipsning ixtiyoriy Л-/(x.y) nuqtasini koordinata^ (11.8) tenglamani qanoatlantiradi. Aksincha ellipsga tegishli bo’lmagan hech [1] nuqtani koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi. Demak (11.8) ellips[11] tenglamasi. U ellipsning **kanonik tenglamasi** deb ataladi. Koordinatalar, **ellipsning markazi** deyiladi. Koordinata o’qlari esa ellipsning **simmetriya o 4** bo’lib xizmat qiladi. Ellipsning fokuslari joylashgan o’q uning **fokal o’q' bey .** Ellipsning simmetriya o’qlari bilan kesishish nuqtalari uni **uchlari dey** .4ı(-<7;0), .1(<7;0), /?ı(0;-Z?), *B(Q,b)* nuqtalar ellipsning uchlari.

b sonlar mos ravishda ellipsning **katta** va **kichik yarim o'qlari** c nisbat ellipsning **ekssentrisiteti** deyiladi va *c* orqali belgilanadi. Ellips Um bo'ladi, chunki
deyiladi-

Haqiqatan, tf-c $c<a$. Ekssentrisitet ellipsning shaklini izohlaydi.

tenglikni *a'* ga bo'lsak 1-f- = f-| yoki

Vo

=)—f [2] bo'ladi. Bundan ekssentrisitet qanchalik kichik bo'lsa ellipsning o'qi uning katta yarim

kichik yanm o'qidan shunchalik kam farq qilishini

Bp rarniz^ $b_0qg_{anc}j_a$ ellips tenglamasi $x\sim+y^2=a^2$ ko'rinishiga ega bo'lib chips a lanaaa

aylanadi. Bu holda $c = Ja^2-b^2 = Ja^2-a^2 = 0$, bo'lgani uchun r = y = 0 bo'ladi.

Demak aylana ekssentrisiteti nolga teng va fokuslari uning markaziga joylashgan ellips ekan.

J Endi ellipsni shaklini aniqlaymiz. Uning shaklini avval I-chorakda aniqlaymiz. Ellipsning kanonik tenglamasi (11.8)ni jyga nisbatan yechsak

4 = j-^ 2 b^2 , , b r~2 2

b a y = —(a -x); y- —va -x cr a

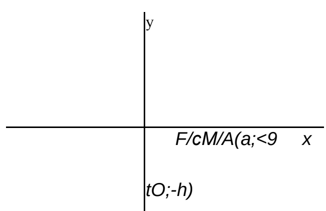
bo'ladi, bunda 0<r<a, chunki $x>a$ bo'lganda ildiz ostidagi ifoda manfiy bo'lib u ma'noga ega bo'lmaydi. *x* 0 dan *a* gacha o'sganda *y b* dan 0 gacha kamayadi.

Ellipsning I-chorakdagi bo'lagi koordinatalar o'qlarida joylashgan 5(0,*b)* va 4(a;0) nuqtalar bilan chegaralangan yoydan iborat bo'ladi (45-chizma).

*

Ellipsning kanonik tenglamasida x ni -*x* ga *vay* ni —*y* ga o'zgartirilsa tenglama o'zgarmaydi.

Bu ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligidan dalolat beradi. Ellipsning ana shu xususiyatiga asosianib uning shakli 45- chizmada ko'rsatilgandek ekanligiga iqror bo'lamiz.



45-chizma

3- misol. Kichik yarim o'qi *b~4* va ekssentrisiteti t-0,6 bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasi yezilsin.

Yechish. Shartga ko'ra £• = - = 0.6; c = 0,6a, $a^2 - c^? = b^2$

a

tenglikka c va *h* ning qiymatlarini qo'yib *a* ni aniqlaymiz.

$$a'' -(0,6a)^2 = 4^2; a^2(I - 0,36) = 16; 0,64a^2 = 16; a^2 = \frac{}{0.64} = 25.$$

Shunday qilib ellipsning kanonik tenglamasi -- + - 1 ko'rinishda bo'lar ekai

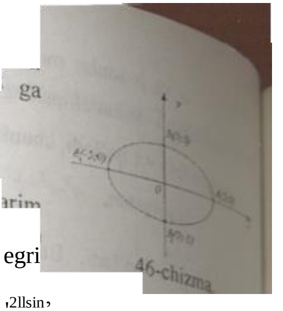
25 16

4- misol. 9.v'+25y-225-0 tenglamaga ko'ra ikkinchi tartibli egri chiziqning Uri aniqlansin va egri chiziq chizilsin.

Yechish. $9x^2+25y^2=225$ Berilgan teng, ko rinishda yozib buni 225 ga bo'lsak

$\frac{35}{225}>\frac{}{225}$; yoki $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$

kelib chiqadi. Demak berilgan tenglama o'qlari tz=5, 6=3 bo'lgan ellipsni tenglamasi^ekan (46-chizma)



46-chizma

5- misol. $4x^2-16.v + 9)'^2-54y + 61 = o$ egri chizia ha • Ж

Yechish. Tenglamani $4(x^2-4x) + 9(y^2 \_6y) + 6i$ '2llsin'

$4(x^2 - 4x \cdot> 4) + 9(v^2 - 6y + 9) 16-81 + 61 = 0$; 4(x-2? oz , ■

2) +T-y=36

ko rinishda yozib buni 36 ga bo'lsak + O'~ 3)^2

9 4'1 yoki

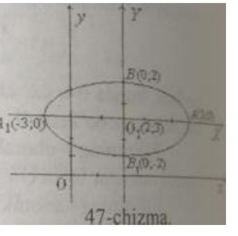
3^2 ' 2^2 -'^{1}/$^{)}$ i tenglama hosil bo'ladi. x-2=¥- vt-v .

' ^mashtirish °ts

$\frac{y^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ kelib chiqadi.

Bu ellipsning O-.AT sistemaga nisbatan kanonik tenglamasi.

Shunday qilib berilgan tenglama ellipsning umumiy tenglamasi ekan. Agar Oxy "eski" sistemani $0_t(2,3)$ nuqtaga parallel kuchirilsa ya'ni OjAT sistemaga nisbatan ellipsning tenglamasi kanonik ko'rinishga ega bo'lar ekan (47-chizma).



47-chizma

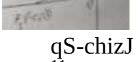
11.4. Giperbola va uning kanonik tenglamasi

5-ta'rif. liar bir nuqtasidan tekislikning berilgan ikkita nuqtasx. masofalarning ayirmasi o'zgarmas bo'lgan shu tekislik nuqtaiarining geonw o'rniga giperbola deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtalarini $F_($ va F_2 orqali belgila gcpirbolaning || fokuslari deb ataymiz. Fokuslar orasidagi mas0 . giperbolaning har bir nuqtasidan uning fokuslarigacha bo '»ап ayirmasini -i *la* orqali bclgilaymiz. *Qxy* dekart koordinataar SIS cllipsdagidek, ya'ni Ov o'qni Fj. F> fokuslaridan o tadigan ф I koordinatalar boshmi $i^{;}_{;}|-_2$ kesmaning o itasiga joylasiitiiami/-

U holda fokuslar /$^?$I(-C,0),F_2(C,0) koordinatalarga ega o

Endi giperbolaning tenglamasini keltirib chiqaramiz. M(л\y) giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Ta'rifga binoan giperbolaning *M* nuqtasidan uning fokuslari Fi va F_2 gacha masofalarning ayirmasi o'zgarmas son + *2a* ga teng, ya'ni



qS-chizJ

11.,.

$MF_1 - MF_2 = \pm 2^{\wedge}$ •

_________ idagi masofani ,opish formulasiga binoan = , + ‘,

I bo’lgan'uchun ------------------_

rhchiqadi- . chiqarishda bajarilgan amallarga o’xshash amallami
^Ellips tenglamas-n^^^y^^) (]J J0)

Olamiz. Ma‘lumki uchburchakning ikki tomonim ayirmas. ,enClamaga ega ‘ .jk $|iunga ko’ra *bF,MF,* дан uchlnchi tomonida $a^2-c^2<0$ *(a>0.c>0)* hosil bo’ladi. Shuning 2 ки*'c^2~-a^b-deb belgilab olamiz. U holda (11.10) formula uchun y0 И _^$^2{}_x{}^2$+ay=-a^{2}6^2 yoki $b^2x^2-a^2y^2=a^2b$~

„ к/л’иН| Buni a^2b^2 ga bo’lib
ko rinishgaegabo ladi.eun. y

^__2L = i (H.ii) *a' b~*

lamani hosil qilamiz. Shunday qilib giperbolaning ixtiyoriy A/(.r,,y) nuqtasini koordinatalari (11.11) tenglamani qanoatlatirar ekan. Shuningdek giperbolaga tegishli bo’lmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko’rsatish mumkin. Demak u giperbolaning tenglamasi.

(11.11) giperbolaning kanonik tenglamasi deb ataladi. Gipcrbolaning tenglarnasida x va y juft darajalari bilan ishtirok etadi. Bu giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligidan dalolat beradi.

Ya'ni qaralayotgan holda koordinata o’qlari giperbolaning simmetriya o’qlari ham bo’ladi.

Gepirbolaning simmetriya o’qlarini kesishish nuqtasi giperbolanina markazi deb ataladi.
b
atalad iG,PerbOlan,n8 fokuS,ari joylashgan simmetriya o’qi uning fokal o’qi deb I S"1"8

Shak‹ini ChiZiShga harakal 4ilamiz. Okii" ‹‹""8 Danini

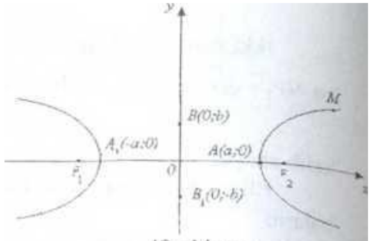
Giperbolaning kanonik tenglamasi (11.11) dan

£ = 4~1; £ = ^-^; / = , *b* ■

' ° * " Gl« o’™ 3 “o b0,:,adi)- ' “ *" + ‘ -.a o’zgarganda
... s 1 c""rak<lag,4iami 49_

’-chi^nadatasvkhnlat eXhiziod" hisobga olsak unma
S " eton chiziqdan iborat bo’ladi.

Giperbolaning fokal o’q bilan kesisishish nuqtalari uning **uchlari** deb ataladi. Giperbolaning tenglamasiga *y=0* ni qo’ysak *x--+a* kelib chiqadi. Demak *Aj(- c/;0)* va */l(a;0)* nuqtalar giperbolaning uchlari bo’ladi.
Giperbolaning tenglamasi (11.11) gax=0 ni qo’ysak $-\frac{y^2}{b^2}=1;\ y=\pm\sqrt{-b^2}$ bo’lad



49-chizma.

Bu esa haqiqiy son emas (manfiy sondan kvadrat ildiz chiqmaydi).Demak giperbola Oy o’q bilan kesishmas ekan.

Shuning uchun giperbolaning fokal o’qi **haqiqiy o’qi** unga perpendikulyar o’qi **mavhum o’qi** deb ataladi.

a va *b* sonlar mos ravishda giperbolaning **haqiqiy** va **mavhum yarim o’qlari** deyiladi.

Giperbolaning *M* nuqtasi u bo’ylab cheksiz uzoqlashganda shu nuqtadan y = --x va *y = -x*to’g’ri chiziqlarning birortasigacha masofa nolga intilishini *a* *a* ko’rsatish mumkin. Ya‘ni giperbolaning koordinatalar boshidan yetarlicha katta masofada joylashgan nuqtalari *y--~x* va *y = --x* to’g’ri chiziqlardan biriga *a* *a* yetarlicha yaqin joylashadi. Koordinatalar boshidan o’tuvchi bu to’g’ri chiziqlar **giperbolaning asimptotalari** deb ataladi.

Giperbolani chizishdan oldin uning asimptotalarini chizish tavsiya etiladi.

Markazi koordinatalar boshida bo’lib tomonlari *Ox* va *Oy* o’qlarga parallel va mos ravishda *2a* va *2b* ga teng bo’lgan to’g’ri burchakli to’rtburchak yasaymiz. Bu to’rtburchakni giperbolaning **asosiy to’rtburchagi** deb ataymiz.

To’rtburchakni diagonallarini har tarafga cheksiz davom ettirsak giperbolaning asimptotalari hosil bo’ladi(50-chizma).

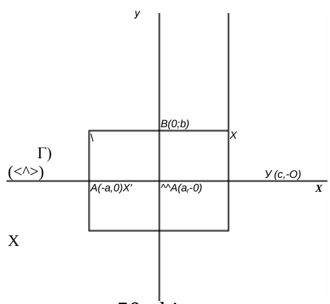
- nisbat giperbolaning **ekssentrisiteti** deb ataladi va *e* orqali belgilanadi. *a*
Giperbola uchun *c>a* bo’lganligi sababli £>\ bo’ladi.

Ekssentrisitet giperbolaning shaklini xarakterlaydi. Haqiqatdan, c^2-a^2=*b*

tenglamani har ikkala tomonini a^2 ga bo’lsak f-j yoki

$\varepsilon^2-1=\left(\frac{b}{a}\right)^2$ kelib chiqadi. ^kichrayganda nisbat ham kichrayadi. Ammo

nisbat giperbolaning asosiy to’rtburchagini shaklini belgilaganligi uchun u giperbolaning ham shaklini belgilaydi. £ qanchalik kichik bo’lsa - nisbat ham ya‘ni *a*
giperbolaning asimptotalarini burchak koeffitsientlari ham shunchali kichik bo’ladi va giperbola Ox o’qqa yaqinroq joylashadi.



50-chizma

Bu holda giperbolani asosiy to’rtburchagi 0.x o’q bo’ylab cho’zilgan bo’ladi.

Haqiqiy va mavhum yarim o’qlari teng giperbola teng tomonli yoki teng yonli deb ataladi. Teng tomonli giperbolaning kanonik tenglamasi

^-~ = 1 yoki x^2-y^2=*a'*
a' a~

ko’rinishga ega bo’ladi.

y=*x* vay=-x to’g’ri chiziqlar teng tomonli giperbolaning asimptotalari bo’lib

uning ekssentrisiteti g = -6- = ■ ~ra -^2 bo’ladi.
a a

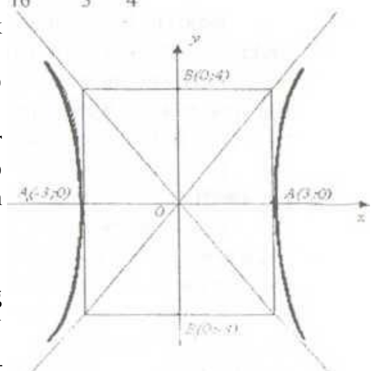
6- misol. 16x"-9y‘=144 egri chiziq chizilsin.

Yechish. Uni har ikkala tomonini 144 ga bo’lsak kelib chiqadi. Demak qaralayotgan egri chiziq yarim o’qlari a=3 va 6=4 bo’lgan giperbola ekan. Markazi koordinatalar boshida bo’lib tomonlari koordinata o'qlariga parallel hamda asosi 6

$$\frac{16x^2}{144}-\frac{9y^2}{144}= \qquad \frac{y^2}{16}=1;\ \frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$$

balandligi 8 bo’lgan to’g’ri to’rtburchak yasaymiz.

Uning diagonallarini cheksiz davom ettirib giperbolaning asimptotalarini hosil qilamiz. Giperbolaning uchlari J_t(-3;0) va /1(3:0) nuqtalar orqali asimptotalarga nihoyatda yaqinlashib boruvchi silliq chiziqni o’tkazamiz. Hosil bo’lgan egri chiziq giperbolaning grafigi bo’ladi



51-chizma

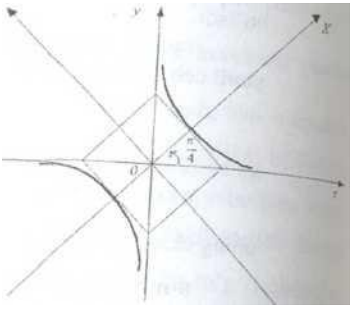
7- misol. V-- funksiyaning grafigi giperbola ekanligi ko’rsatilsin. X
к

Yechish. Koordinata o’qlarini a = — b u rchakka burib “yangi” OAT .4 (51-chizma). sistemani hosil qilamiz. Bu holda «yangi» koordinatalardan «eski» koordinatalarga

^2 /—
o'tish formulasi x~u rs (* Y) ; = zl/y
F) ko'rinishga ega bo'lish, kn ati|g edi (l-ma'ruza). л va y ning ushbu qiymatlarini , = i
2
tenglama V2, ,. * . Л Л * ‹‹ ‹ 83 40›∧
2 (Z + n∧∧› ∧ ∧(ˌV + r,(_V_∧‘^i
bo silbo>M

Bu tenglama tengtomonli gipcrbolaning tenglamasi. $k>0$ bo'lganda u haqtqiy o'qi OTЫ I an RO bo'lganda 0У o'q bilan ustma-ust tuiadt PегЬo1a*8 RO bo'lgan hoi uchun giperbola 52-chizmada tasvirlangan ' *DY DM* "'/'Ski O'nlnr *DYV* " •» ®

Ox. *Oy* "«ski" o'qlar *OXY* "yangi" sistemani koordinata burchaklarTni bissektrisalari bo'lgani uchun ular teng tomonli giperbolani asimptotalari bo'ladi. Shunday qilib *y* = ~ funksiyaning grafigi asimtotalari *Ox* *va* *Oy* o'qlardan iborat tengtomonli giperbola bo'lar ekan. Shuningdek *y* = ^~ kasr-chiziqli funksiyaning grafigi ham asimtotalari koordinata o'ql ari g a parallel tengtomonli giperbola ekanligini ko'rsatish mumkin.



52-chizma

6-ta'rif. Berilgan nuqtadan Ьат^а^еХаГю^^'сЬ^ъТ8' joylashgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **parabola** debtuaM UZo4likda

Berilgan nuqtani F orqali belgilab uni parabolaning **fokusi** deb ■ Berilgan to'g'ri chiz.qm parabolaning **direktrisasi** deb ataladi. (Fokus direSda yotmaydi deb faraz qilmadi).
' s airektrisada

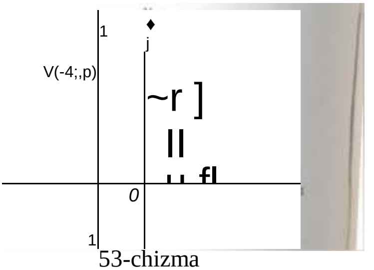
□ara^‹‹a8aCha ‹‹ P Orqa" bClSil‹‹^ - Pa-boianiog fokusgatomonvo'naltiramiz. ' o tkaZ›b Уo

nahshini ^ektr.sadan

Koordi^a/ar boshini fokusdan direktrisagacha inasola Л7? ning qOq o rtasiga joylashtiramiz(53-chizma).

Tanlaiig311 koordinatalar 'iW sistemasiga nisbatan fokus koordinatalarga, tenglamaga direktrisa *x~~2* ega bo'ladi.

Faraz qilaylik 'W-T.) parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'ls*- Parabolaning ta'rifiga binoan



53-chizma

A/№W/' г. ----- г uqtadan direktrisagacha *MN* rnasofa undan fokusgacha

5_3.chizmadan $MN = |x + f$ j

ekani ravshan. -------- - ----

Demak, v+“ = -y'(x-y)^2 + y^2 .

Bu ten°lamaning har ikkala tomonini kvadratga ko’tarib ixchamfel $x^2 + px +$ — - $x^2 - px +$ ~ $+y^2$ yoki $y^2 = 2px$ '1Й 4 4

hosil bo’ladi.

Shunday qilib parabolaning istalgan *M(x,y)* nuqtasiniipejiinatalari J112) tenglamani qanoatlantiradi. Parabolada yotmagan herdnuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko’rsatishuM Demak (11.12) parabolaning tenglamasi ekan. U parabolaning kanonfaramasi deb ataladi./? parabolaning parametri deb yuritiladi.

Endi kanonik tenglamasiga ko’ra parabolani shaklinийяк (11.12) tenglamada *y* ni -*y* ga almashtirilsa tenglama o’zgarmaydi. fcfealar o’qi parabolaning simmetriya o’qidan iborat ekanligini bildiradi. (Hinaman ing chap tomoni manfly bo’lmaganligi uchun uning o’ng tomoni sir J ling ham manfiy bo’lmasligi kelib chiqadi. Demak parabola Ov o’qnh.g tomonida joylashadi. x=0 da$y=0$. Demak parabola koordinatalar boshidan®

x cheksiz o’sganda *y* ning absalyut qiymati ham cheksiz o'sadi. (11.12) tenglama yordamida aniqlanadigan parabola 54-chizmada tasvirlangan.

Parabolaning simmetriya o’qi uning fokal o’qi deb ataladi.

bhts

x

Direktrisa

Parabolaning simmetriya o’qi bilan kesishish nuqtasi uning uchi deyiladi. Qaralayotgan hoi uchun koordinatalar boshi parabolaning uchi bo’ladi.

1 / = 4>X

8- misol. $y^2=8x$ parabola berilgan. Uning direktrte? tenglamasi yoziisin va fokusi topilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani parabolaning bilan taqqoslab 2/?=8,/?=4 ekanini ko’ramiz. Direktrisa .v---slMiaga. fokus

(*p*

' 2’ koordinataiarga ega bo’lishini hisobga olsak diretemgtenglamasi x=-2 va fokus F(2;0) bo’ladi.

Izoh. Fokal o’qi Ovo’qdan iborat parabolaning tenglama

$$x^2=2py \qquad (11.13)$$

Ko nnishga ega bo’ladi

„planing tenglamasi kanonik ho|ga keltirikin, a

9- misol. y=3x^2-12x+16 p#^{r}**

uning uchi topilsin.

Yechish. Tcngiamani Д)^4 16;y=3(x-2)^2+4;y-4=3(л-2)^2 y=3(?-4x)+ 16,y=3(?-4X ' ^{4}j^b belgilasak parabolaning tenglamasi ko'rinishga keltirib x-2-A^z,y-4^3*^ У^3А^3

_ . y-4=У alamashtirish bilan "eski" o$_v$ sister kanonik ko'rinishga keladi. *x-T* "Yangi" *0$_J$XУ* sistemaga **nisbatan** parabolanin 0,(2;4) nuqtaga parallel ko'chir^'^ga bo'ladi. "Yangi" sistemani koordinata^ tenglamasi kanonik ko'rinish|p^a fining koordinatalari bo'ladi, ya'ni x_0=2 y_0=4 ' boshini koordinatalari parabola $^{u<;}$ jiamda y=8

■У A

10- inisol. /^(0,4) nuqtad^{31}' joylashgan to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqli^ o'mi, egri tekislik nuqtalarining geomed Д^п kesishish chiziqning koordinata o'qlari * .^ilsin. nuqtalari topilsin va egri chizicl ^{c} chiziqning

W(x,'3)

> A/faxi r(0;2)

Дф I

Yechish. *M(x,y)* eg*"* ^ga binoan ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

^hiziqqacha

undan y-8 to'g'ri va undan

MN = /(x-x)^2 + (8-y)^2 masCfJ

5 5-chizma.

2) nuqtagacha *MF = fix-®*

masofa o'zaro teng ya'ni,_____yp = 7(* - 4^ (55-«chizma).

yl(x-x)^1 j kvadratga ko'tarsak (8-y)$^{2:}$=ac^r-ь0$_?$_4)^2 Bu tenglamani har ikkala tom^^{n}*$^($ yoki qavslarni ochsak. , ,2+y~-8y+16 yoki 64-16y-x^2—85/+16

64-16y+y*'^htisak

hosil bo'ladi. Tenglamani sod^a\ +-16-64, -8y=x'-48

yoki -8 ga bo'lsak $\frac{1}{8}$ v> + 6

,^qa simmetrik parabolaning, t<englamasi. tenglamaga ega bo'lamiz. U Qk'^pta o'qlari bilan kesishish rnuqtalarini topamiz.

Endi parabolaning koP^r ,|tni qo'ysak y-б kelib chiqqabdi. Demak parabola Parabola tenglamasiga x-0 '^^ishar ekan. Shuningdek pJWr^borla tenglanssiga Ovo'q bilan 0,(0,6) nuqtada ^{k} $_0$;-x'+ 480; x$^!$ » 48; л = t^.$_{4S}$ = ±W3 y=0 qiymatini qo'ysak $^{r\ 1}$, . .. г /-

, . , ,

8 . 0 q bilan (-4VT0) ва (4V3,Cl>^ nuqtalarda kc sliar hosil bo'ladi. Demak parabola $^{ei<an}$- (|i j'-6 = --'x^2 yoki x^2—8(_w-c6) ko'rinishdayozib

Agar parabola tenglai ' ^jng tenglamasi A^{z2}=-8.V kanaomik shaklni ofajj. *x=X, y-6=Y* almashtirish ols^ ^{1} .^ola va parabola umumiy tcrar*^glamalari yordimida

Izoh. Aylana, ellips, g'P^'^ini parallel ko'chirish yokki koordinata oarin' berilganda koordinatalar sis<^{eP}

- h yordamida umumiy tenglamani "yangi" sistemaga nisbatan kanonik

^"inisl'g^{akel,irishmumkin}-

^{к}ц6 Ikkinchi darajali algebraik tenglamalar yordamida aniqlanadigan chiziqlar haqida

Biz to'rt xil ikkinchi tartibli egri chiziqlarni ko'rdik: aylana, ellips, giperbola arabola.

Ularning barchasini tenglamasi ikkinchi darajali algebraik tenglama $/lx^2 + fixy + Cy^2 + Dx+ Ey + F = 0$ (11.1)
yordamida aniqlanadi.

7 Endi quyidagi savolga javob izlaymiz.

1. (11.1) tenglama faqat aylana, ellips, giperbola va parabolani aniqlaydimi -oki u boshqa chiziqlarni aniqlashi ham mumkinmi?

2. (11.1) tenglama hardoim ham qandaydir egri chiziqni ifodalaydimi?

Bu kabi savollarga to'liq javob berish uchun bir nechta misollarni qaraymiz.

1.Ikkinchi darajali $(x-x_0)^2+(y-.y_0)^2 = 0$ tenglamani faqat bitta $(x_0;.y_0)$ nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi. Demak bu tenglama nuqtani aniqlaydi.

2.Ikkinchi darajali $x^2-j^2=0$ tenglamani $(x\text{-yX-}^{v+} y)\sim ^0$ ko'rinishda yozsak uni x-.y = 0 va x + y = 0 to'g'ri chiziqlarning koordinatalari qanoatlantiradi.

x-y~0 (yoki *y=x)* va x+y=0 (yoki y=-x) to'g'ri chiziqlar koordinatalar boshida kesishuvchi koordinata burchaklarning bissektrisalaridir. x^2-y-0 tenglama ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlarning tenglamasidir.

3. Ikkinchi darajali $y^2=9$ tenglamani y-9~0 yoki (y-3)(y+3)=0 ko'rinishda yozsak uni *y=3* va *y--3* parallel to'g'ri chiziqlarni nuqtalarining koordinatalari qanoatlantiradi xolos. Demak $v^2=9$ tenglama ikkita parallel to'g'ri chiziqlarning tenglamasi.

4. Ikkinchi darajali x^2-2xyty'--0 tenglamani $(x-y)^2$-0 ko'rinishda yozsak u x-y=0 (I va III koordinata burchaklarini bissektrisasi) to'g'ri chiziq tenglamasiga teng kuchli bo'ladi.

Bu holda shartli ravishda $x^2-2xy+y^2=0$ tenglamani **birlashuvchi** ikkita to'g'ri chiziqni tenglamasi deb ataymiz.

5. Nihoyat x va *y* ga nisbatan ikkinchi darajali algebraik tenglama hech qanday egri chiziqni aniqlamasligi ham mumkin. Masalan, koordinatalari ^{x} $^{+}$У+3=0 tenglamani qanoatlantiradigan nuqta mavjud emas.

Shunday qilib x va *y* ga nisbatan ikkinchi darajali (11.1) tenglama, tenglamaning koeffitsientlariga bog'lik ravishda aylanini. ellipsni. giperbolani. parabolani, bir juft kesishuvchi to'g'ri chiziqlarni, ikkita parallel to'g'ri chiziqlarni, birlashuvchi ikkita to'g'ri chiziqlarni, nuqtani aniqlashi yoki hech qanday egri chiziqni aniqlamasligi ham mumkin ekan.

(Il l) umumiy tenglamani koordinatalar sistemasi parallel ko'chirish va ^{0} qlarni burish natijasida yangi sistemaga nisbatan kanonik tenglamaga keltirib egri chiziqni turini aniqlash va uni chizish mumkin.

11.7.Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning qo'llanishi

Bndi ikkinchi tartibli egri chiziqlarni fan va texnikani turli sohalarida 9° Hanishiga misoliar keltiramiz.

1. Quyosh sistemasining planetalari uning atrofida fokuslarining birin quyosh joylashgan ellips bo’ylab harakat qiladi.

2. Havoning qarshiligini hisobga olinmasa gori/ontga ma‘lum burch-r ostida otilgan snaryad parabolani chizadi.

3. Agar parabolaning fokusiga yorug’lik manbai joylashtiriIsa parabola^ qaytgan nur parabolaning o’qiga parallel yo’naladi. Hrojektorning qurilm^ parabolaning ana shu xossasiga asoslangan.

4. Yerning sirtidan gorizontga ma‘lum burchak ostida v_0=ll,2 km/s$_{Oat}$ (ikkinchi kosmik tezlik) boshlang’ich tezlik bilan uchirilgan raketa parabol bo’yicha harakatlanib yerdan cheksiz uzoqlashishi ntexanikada isbotlangan Vo>H,2 km/soat boshlang’ich tezlik bilan uchirilgan raketa giperbola bo’yi$_{C|la}$ harakatlanib yer sathidan cheksiz uzoqlashadi. Yerdan v_0<ll,2 km/soat boshlang’ich tezlik bilan uchirilgan raketa yerning atrofida ellips bo’ylab harakatlanib u yo yerga qulab tushadi yoki yerning sun‘iy yo’ldoshiga aylanadi.

Endi ikkinchi tartibli egri chiziqlarni qishloq xo’jaligi masalalarini yechishda uchrashiga doir misollar keltiramiz.

5. Makkajuxori donining hosildorligi *y* va namlikring unumdorlik zahirasi д-orasidagi bog’lanish

$$y{-}{-}0{,}006л{-}^2{+}1{,}100x{-}4{,}200$$

formula yordamida aniqlanishi tajriba yo’li bilan isbotlangan. Oxirgi tenglama pastga yo’nalgan parabola tenglamasi. Ana shu parabolani chizib hosildorlik qaehon yuqori bo’ladi va hosildorlik qaehon nolga teng tbo’ladi degan savollarga javob topish mumkin.

6. Bir sutkada sigirdan sog’ilgan sut *y* (litrda) v^a sigirning yoshi *x* (yil) orasidagi bog’lanish

$y=-9{,}53+6{,}86x-0{,}49x^2$ formula yordamida aniqlanishi isbotlangan.

Bu tenglama parabolani ifodalaydi. Shu parabolani biror oraliqda, masalan [2,12] oraliqda chizish orqali sigir necha yoshida engj ko’p sut beradi degan savolga javob topish mumkin. Chunki parabola uchining ^abssissasi sigirning o’sha yoshiga to’g’ri keladi. Qaralayotgan holda sigir eng ko’p sutni 7 yoshida berishini isbotlashni o’quvchiga havola etamiz.

7. Oq so’xta o’simligining o’sish balandligi *У* dastlabki namhkdan sug’orilganga qadar 25-60% oralig’ida va tuproqning engg kam namligi *x* orasi ag» bog’lanish formula yordamida ifodalanishi isbotlangan. bunda л- % danay esa nirn cla 0,ına<**

Bu tenglama tengtomonii giperbolaning tenglamasioidir. J

S3 f$_{or}$niu[a]

8. 1 kg yog' olish uchun lozim bo’lgan sut (litr)() miqdori *y*-

yordamida aniqlanadi, bunda л* sutdagi yog’ning foizi (2<^-$^{x<}$6)- tengto^"

Bu tenglama asimptotalari koordinata o’qlarididan ib°rat giperbolaning tenglamasi.

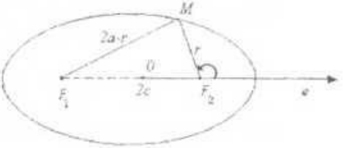
Endi shu formuladan foydalanib 6 kg yog’ olish uchun yog’liligi x=4,2 bo’l2an sutt*an nec^a litr kerak bo’lishini aniqlaymiz.

$$y = \frac{}{4.2} = 20.92$$

Demak 1 kg yog’ olish uchun 20,92 litr sutni olish kerak ekan. 6 kg yog’ $_0$|ish uchun esa 6-20,92=125,7 litr sut kerak bo’ladi.

11.8.Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning qutb tenglamalari

Qutb koordinatalar sistemasida ellips tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun qutbni ellipsning o’ng fokusi F_2 ga joylashtirib qutb o’qini F|F_2 dan o’tuvchi to’g’ri chiziq bo’yicha yo’naltiramiz (56-chizma).



56-chizma

Faraz qilaylik M (<p;r) ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo’lsin. U holda F_2M=/- ekanini hisobga olsak ellipsning ta’rifiga binoan F|M=2a-r bo’ladi, chunki ta‘rifga ko’ra F,M+F_2M=2a Kosinuslar teorcmasiga binoan №\MF, dan {2a -r)^2

$= r^2 + (2c)^2 - 2$■r 2c■ cos(180" - <*p), 4a^2 ■ 4ar* + r^2 = *r*^{2} + 4c^2 + 4rc

cos *(p,a^l - ar - c^2*t-cr cos f?;

a~-c = ar+ crcos(/)', b~ = ar(1 + $\frac{c}{}$ cos<p); $\frac{O}{}$ = r(l + ccos^) $\frac{a}{a}$

kelib chiqadi. *p*-$\frac{}{a}$ deb belgilasak.

$$p = r(l+ £ \cos p) \text{ yoki } r = \frac{}{1 + s \cos <p} \quad (11.14)$$

hosil bo’ladi.

p-ellipsning **parametri** deb ataladi. (11.14) ellipsning qutb tenglamasi. Bu yerda 0<zz< 1.

Agarda qutbni ellipsning chap fokusi F| ga joylashtirsak uning tenglamasi

$$r = \frac{£}{1 - £ \cos (/)} \quad (1\ 1.15)(0<c<l)$$

ko’rinishga ega bo’ladi.

Osonlik bilan tekshirib ko’rish mumkinki £>] bo’lganda (11.14) yoki (11.15) tenglamalar giperbolaning tenglamasini 6-1 bo lganda esa ular parabolaning tenglamasini ifodalaydi.

Shunday qilib £ ning qiymatiga bog’liq ravishda bitta (11.14) yoki (11.15) tenglama uchta chiziq ellips, giperbola va paraboladan birini ifodaiashi mumkin ekan.

ll-misol. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning tenglamalari kanonik ko’rinishda yoziisin.

a) $r = \dfrac{9}{5 - 4\cos\varphi}$; 4- 5 cos <*p* ! - cos *(p*

Yechish. a) Tenglamani r = $\frac{9}{5(1 - \cos}$ yoki r = — $\frac{\frac{9}{5}}{1 — \cos <p}$ ko'rinishda 5 5

yozib uni (11.15) bilan taqqoslasak — = -,« = - = - $\frac{9}{a}\frac{c}{5}\frac{4}{a 5}$ kelib chiqadi. fc-=2.<1 j

bo'lgani uchun berilgan tenglama ellipsning qutb tenglamasi.

a-5, b~3 va c=4 sonlar — = - va tengJamalarni qanoatlantiradi $\frac{£ \sim 9}{a\ 5}$ $\frac{c\ 4}{a\ 5}$

Demak yarim o'qlari <7=5, 6=3 bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasi |~ + Z_ = 1 bo'ladi.

b) Shuningdek tenglamani /- = $\frac{9}{4(1 \ \cos w)}$ — $\frac{9}{1 - \cos (p}$ ko'rinishda yozib uni $\frac{}{4}$

kelib chiqadi. Bundan *b=3, a-4 c~5*

(11 15) bilan taqqoslasak — = $\frac{c}{a\ 4}$ $\frac{4\ t>-}{a\ 4}$: 9 c 5 .

hosil bo'ladi. £ = ^>1 bo'lgani uchun berilgan tenglama giperbolaning qutb tenglamasini

ifodalaydi va giperbolaning kanonik tenglamasi y- --y- = l bo'ladi.

d) Tenglamani r->-cos<p = 3 ko'rinishda yozib olib qutb va dekart koordinatalarni bog'lovchi r = Jx^2 + y^z,*r<x>s<p = x* formulalardan foydalanamiz.

[J holda $Jx^2 + y^2$ -x-3 yoki $Jx^2 + y^2$ = 3 + x.

Tenglamani har ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlasak $x^2+y^2=(3+x)^2$; $x^2+y^2=9+6x+x^2$; $J/^2$=6x+9 yoki j/=6(x+3/2) bo'ladi. Bu chiziq simmetriya o'qi Ox o'qdan iborat parabola ekan. Parabolani tenglamasini kanonik

holga keltirish uchun "eski" sistemani 0Д0;—$\frac{3}{}$) nuqtaga parallel ko'chiramiz, ya ni

v + 2= ,\|*y-Y* deb otamiz. U holda parabola tenglamasi (кУУ sistemaga nisbatan 2 $У^2=6.У$

kanonik ko'rinishga ega bo'ladi.

Mustaqil echish uchun mashqlar va test savollari

1. a) markazi (2;-3) nuqtada va radiusi 4 ga teng, b) markazi (-2;3) nuqtada (1-1) nuqtadan o'tuvchi; d) diametri *All* kesmadan iborat, bunda /1(3;9) va 6(7, avlaning kanonik tenglamasi yozilsin va aylana chizilsin.

Javob: a) $(x-2)^2+-(y+3)^2=4^2$; b) $(x+2)^2-+(J>-3)^2=5^2$; d) $(x-5)^2+(y-6)^2=13$.

2. Л(9;3), 6(-3;3) va C(11;1) nuqtalardan o'tuvchi aylananing kanonik tenglan[1] talari yozilsin.

9

Ko’rsatma. Aylananing kanonik tenglamasiga x vaj'o’rniga berilgan nu5 13Si koordinatalarini qo’yib n. *b* va *R* ni aniqlash uchun uchta tenglamalar si | hosil qilinadi.

3. Ikkinchi darajali Ax^2 t/?xy+Cy^2 +Dx+Ey+/'-0 algebraik tenglama markazi 0|(4;3) nuqtada, radiusi 6 ga teng aylanani ifodalashi uchun uning kocffitsientlari qanaqa qiymatlarni qabul qilishi kerak? Javob: *A-C'-l,* E=0, *D-* -8, E-6, F=-1 I

4. a) x^2-t-_y^2-4x+6y-3-0; b) x^2+y^2-6x+5=0; d) $x^2+y^2-4y=Q$
umumiy tenglamalari yordamida berilgan aylananing markazi va radiusi topilsin. Javob: a) 0,(2,-3), RM; b) 0,(3, 0), R=2, d) 0,(0;2), R=2.

5. Ox o'qqa urinib Ov o'q bilan /?(0;6) nuqtada kesishuvchi aylananing tenglamasi yoziisin. Javob: $x^2+(y-3)^2=9$.

6. Koordinatalar boshidan *a* birlik uzoqlikda koordinata o'qlariga urinadigan aylananing tenglamasi yoziisin.
Javob: $(x-a)^2+(y$-л$)^2=a^2$; $(x+a)^2+(y-a)^2=(7^2$; $(x-o)^2+(y+a)^2=a^2$; $(x+$я$)^2$+(y+яУ==a^2.

7. Ellipsning kanonik tenglamasi yoziisin va ellips chizilsin.
a) yarim o'qlari mos ravishda 6 va 4 ga teng;
b) fokuslari orasidagi rnasofa 8 va katta yarim o'qi 5 ga teng;
d) katta yarim o'qi 10 ga va ekssentrisiteti 0,6 ga teng;
e) kichik yarim o'qi 6 ga va ekssentrisiteti 0,8 ga teng;
f) ekssentrisiteti 0,8 ga va fokuslari orasidagi rnasofa 8 ga teng.

Javob: a) ~ + --- = 1; b) —- + = 1; d) + — = 1; e) — + -- = 1; f)-— + -— = 1.
36 16 25 9 100 64 100 36 25 9

8. Ellipsning tenglamasi —+ ^- = 1 va Л7(3;y) nuqtasi berilgan. Shu nuqtasining
36 12
ordinatasi *y* topilsin. Javob: *y~±3.*

9. Л/(4;0) va N (2;3) nuqtalardan o'tuvchi ellipsning kanonik tenglamasi yoziisin.

Javob: —+ ~ = 1.

16 12

10^x^2tv"-25 aylananing barcha nuqtalarini ordinatalarini 5 barobar kichraytirish natijasida hosil bo'lgan egri chiziq tenglamasi yoziisin, turi aniqlansin va egri

chiziq chizilsin. Javob:) — + -—= -ellips.
25 I

11. Giperbolaning kanonik tenglamasi tuzilsin va giperbola chizilsin.
a) yarim o'qlari mos ravishda 5 va 4 ga teng;
b) fokuslari orasidagi rnasofa 14 ga, uchlari orasidagi rnasofa 12 ga teng;
d) haqiqiy yarim o'qi 5 ga va ekssentrisiteti 1,4 ga teng;
e) fokuslari orasidagi rnasofa 16 ga va ekssentrisiteti 4/3 ga teng;
f) haqiqiy yarim o'qi TГ.5 ga teng va , /(5:-2) nuqtadan o'tuvchi;
g) A'/,(2V7;-3) va Л-/,(-7,-бТ2) nuqtalardan o'tuvchi.

Javob: a) |; b) ^-^- = 1; d) Г- ,/=l; e) =
25 16 36 13 25 24 36 28

h 6 25 75

12. a) $25x^2-144y^2=3600$, b) I6$y^?$-9x^2=144, d) $4x^2-y^2$-!6-0 tenglamalari yordamida berilgan giperbolalarning <7.6-yarim o'qlari, ^-ekssentrisiteti va F|, F_2 fokuslari topilsin. Javob: a) <7=12, *b-5, e* = ~, F|(-13,0), F->(13,0) b)a=3, Z>=4, £• = --
12 " 4' Fj (0,-5), F_2(0,5) d) a=2, Z>=4,

<7=2^5 , $F_{(}$(-2V5 ,0), F_2(2^5 ,0)

13. = giperbolaning asimptotalarini tenglamalari yozilsin.

Javob: y = -x va y=--x.
3 3

88

14. 1 kg yog’ olish uchun kerakli sut miqdori y = — formula yordamida
A'

aniqlanishi ma’lum bo’lsa (x-sutdagi yog’ foizi) 20 litr sutdan 1 kg yog’ olinishi uchun sutdagi yog’ foizi qanday bo’lishi kerak? Javob: x-4,4%.

15. Fokuslari orasidagi masofa 5 va asimptotalari y = - x va y = _l_x
2 2
• • X 2 y 2
tenglamalarga ega giperbolaning kanonik tenglamasi yozilsin. Javob: — = 1.

16. Ekssentrisiteti 2 gateng giperbolaning asimptotalari orasidagi burchak topilsin. Javob: 60°.

17. x"-y^2=8 tengtomonii giperbola berilgan. Fokuslari shu giperbolaning fokuslarida bo’lib zl(4;6) nuqtadan o’tuvchi ellipsning kanonik tenglamasi topilsin.

Javob: —+ —= 1.
64 48

18. Parabolaning kanonik tenglamasi yozilsin.

a) simmetriya o’qi *Ox* o’qdan iborat, uchi koordinatalar boshida joylashgan va fokusi uchidan 6 birlik uzoqlikda yotgan;

b) uchi koordinatalar boshida joylashgan, (2,-4) nuqtadan o’tuvchi va Ox o’qqa nisbatan simmetrik;

d) uchi koordinatalar boshida yotgan, fokusi F(0,3) nuqtada bo’lgan *Oy* o’qqa nisbatan simmetrik;

e) fokusi F(3.0) nuqtada, direktrisasi Oy o’qdan, simmetriya o’qi Ox o’qdan iborat. Javob: a) y^3=24x vay^2=-24x, b) _y^2-8x, d) x^2= 12y, e) y^2=6x-9.

19. y^2=2/?x parabola >4(2,4) nuqtadan o’tca uning parametrini toping- Javob: p=4.

20. Yo’ng’ichqaning o’rtacha hosildorligi *y* (sentner) bilan uning sug’orish chuqurligi x(sm) orasidagi bog’lanish y=0,0028x^2H),253x+3,520 formula yordamida ifodalanishi ma‘lum bo’lsa, x [0; 30] oraliqda o’zgaradi deb x ning qanday qiymatida hosildoriik eng ko’p bulKliini aniqiang? Javob. x 30.

21. Egri chiziqlar chizilsin:

a) x^2 i-4x+4v^2-0, b) 2.v‘-8x • y“-6.r4 1 =0, d) x^2-8x-4y^2=0. e) v'-6v-x'i-2x-0. , ,

22. Koordinata o’qlarini 45^c ga burish natijasida tengtomonii x giperbolaning tenglamasi *OXY* “yangi” sistemaga nisbatan qanaqa ko’rinis g^a bo’ladi. Javob: А'У=-—-.

,2 .. L-o’rini^{5,1}∧^{3}

23. y-4x‘-8x+5 tenglama koordinatalarni almashtirib kanoniK к I keltirilsin. Javob: У=4.У.

24. a) 4x^2+9y^2+32x-54y+109=0, в) 4x^2-25y'^2-24x+50y'-89-0. tenglama soddalashtirilib egri chiziqning turi aniqlansin. Javob: a) markazi 0i(-4;3) nuqtada, yarim o’qlari 3 va 2 bo’lgan ellips; b) markazi 0|(3,1) nuqtada, haqiqiy yarim o’qi 5 ga va mavhum yarim o’qi 2 ga teng bo’lgan giperbola.

25. — + — = 1 ellipsning eng sodda qutb tenglamasi topilsin. Javob:
9 4

4

3 - V5 cos

26..X²-4.v+y²+6y 4-13 = 0 tenglama nimani ifodalaydi?

A) aylanani B) ellipsni D) giperbolani E) parabolani F) nuqtani.

27. $x^2 + y^2 + 2(x + y) + 4 - 0$ tenglama nimani ifodalaydi?

A) nuqtani B) aylanani D) ellipsni E) parabolani F) hechnimani.

28. $x^2 + y^2 + 4.v - 6y + 12 = 0$ tenglama nimani ifodalaydi?

A) aylanani B) ellipsni D) giperbolani E) parabolani F) nuqtani. 29.4A²+9v² -16x + 54y + 61 = 0 tenglama nimani ifodalaydi?

A) aylanani B) ellipsni D) giperbolani E) parabolani F) nuqtani.

30. л-² }-2y-4x-24 tenglama nimani ifodalaydi?

A) aylanani B) ellipsni D) giperbolani E) parabolani F) hechnimani. 3

31. r = — --- tenglama nimani ifodalaydi?
5 + cos <*p*

A) aylanani B) ellipsni D) giperbolani E) parabolani F) nuqtani.

2
32. *r* - .... tenglama nimani ifodalaydi?
5- 8cos<p

A) aylanani B) ellipsni D) giperbolani E) parabolani F) nuqtani.

33. r = ----- -- tenglama nimani ifodalaydi?
9 + 9cos$9

A) aylanani B) ellipsni D) giperbolani E) parabolani F) nuqtani.

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

1. Ikkinchi darajali algebrik tenglama deb qanaqa tcnglamaga aytiladi?
2. Ikkinchi tartibli egri chiziq deb qanday chiziqqa aytiladi?
3. Qanday chiziq aylana deb aytiladi? Uning kanonik tenglamasini yozing.
4. Aylananing radiusi nima?
5. Qanday chiziq ellips deb aytiladi? Uning kanonik tenglamasini yozing.

6- Ellipsning markazi deb qaysi nuqta aytiladi?

”7- Qanday nuqtalar ellipsning uchlari deb ataladi?

8- Qanday o’q ellipsning fokal o’qi deb ataladi?

Ellipsning ekssentrisiteti deb nimaga aytiladi va u doimo qanday shartni qanoatlantiradi?

0-Yarim o’qlari teng ellips nimani ifodalaydi?

^■Qanday chiziq giperbola deb ataladi? Uning kanonik tenglamasini yozing.

13 n a›lday nuc lta g*P er bolaning markazi deb ataladi?

ft ’Q an<lay nuqtalar giperbolaning uchlari deb ataladi?

14. Giperbolaning ekssentrisiteti deb nimaga aytiladi va u doimo qanday shartni qanoatlantiradi?
15. Qaysi o’q giperbolaning fokal o’qi deyiladi?
16. Giperbolaning asimptotalari nima?
17. Qanday chiziq parabola deb ataladi? Uning kanonik tenglamasi qanday?
18. Parabolaning fokusi va direktrisasi nima? Ular qanday xossa bilan bog’langan
19. Qanday nuqta parabolaning uchi deb ataladi?
20. Parabolaning fokal o’qi nima? Unga nisbatan parabola qandayjoylashadi?
21.Ikkinchi darajali algebraik tenglamalar aylana, ellips,giperbola va paraboladan tashqari yana nimalarni ifodalashi mumkin?
22.Ikkinchi tartibli egri chiziqlar qaerlarda ishlatiladi?
23.Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning qutb tenglamalarini yozing.

12- ma‘ruza. Mavzu: Tekislik tenglamalari

Reja:
1. Egri chiziq va sirt tenglamasi haqida tushuncha.
2. Berilgan nuqtadan o’tuvchi tekislik tenglamasi.
3. Tekislikning umumiy ko’rinishdagi tenglamasi.
4. Tekislikni uning tenglamasiga ko’ra yasash.
5. Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi.
6. Uch nuqtadan o’tuvchi tekislik tenglamasi.
7. Tekislikning normal tenglamasi.
8. Ikki tekislik orasidagi burchak. Tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.
9. Uch tekislikning kesishish nuqtasi.
10. Nuqtadan tekislikgacha rnasofa.

Adabiyotlar: 3,5,8,10.11,15,16.

Tayanch iboralar: egri chiziq, sirt, tekislik tenglamalari, burchak, parallellik,perpendikulyarlik, normal vektor, tekisliklar bog’lami, boglam markazi.

12.1. Egri chiziq va sirt tenglamasi haqida tushuncha

Biz to’g’ri chiziq hamda ikkinchi tartibli egri chiziqlar bilan tanishdik Ko’rdikki to’g’ri chiziq tenglamasi dekart koordinatalari *x* vay ga nisbatan birinchi darajali tenglama yordamida, ikkinchi tartibli egri chiziqlar esa ularga nisbatan ikkinchi darajali algebrik tenglamalar yordamida aniqlanadi. Boshqacha aytganda' va *y* ga nisbatan birinchi darajali tenglama Олу tekisligidagi to’g’ri chiziqn aniqlaydi, ularga nisbatan ikkinchi darajali algebrik tenglama esa $hu tekisir^ ikkinchi tartibli egri chiziqlarni aniqlashi mumkin. Endi Олу tekislikdagi ’s : egri chiziq tenglamasi tushunchasini kiritamiz.

Faraz qilaylik *x* vay ni bog’lovchi F(x; y) = 0 tenglama berilgan bo’lsin- tcngl®"’ yorda*1’

1- ta‘rif. Олу tekislikning koordinatalari F(x,y)=0 qanoatlantiruvchi nuqtalarining geometrik o’rni shu tenglama aniqlanadigan egri chiziq deb ataladi. . ■. i- ж i

F(x. y)=0 tenglama ana shu egri chiziqning tenglamasi deb ata a •

X

Demak, egri chiziq tenglamasi deb dekart koordinatalari x vay ni bog'lovchi shunday F(x,y)=0 tenglamaga aytiladiki egri chiziqning istalgan nuqtasini koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi va egri chiziqda yotmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi.

Boshqacha aytganda *Oxy* tekislikdagi istalgan egri chiziq uning tenglamasi deb ataluvchi F(x, y)=0 tenglama yordamida aniqlanar ekan, ya'ni F(x, y)=0 tenglama *Oxy* tekislikdagi egri chiziqni aniqlaydi.

Shunga o'xshash *F(x;y;z)-0* (12.1) tenglama ham *Oxyz* fazodagi koordinatalari shu tenglamani qanoatlantiruvchi sirtni aniqlaydi. (12.1) tenglama ana shu sirtning tenglamasi deb aytiladi, *x,y,z* esa dekart koordinatalari deyiladi.

Izoh. Istalgan F(x;y)=0 tenglama har doim egri chiziqni va F(x,y,z)=0 tenglama har doim sirtni aniqlaydi deb o'ylash noto'g'ri.

Endi fazodagi analitik geometriya bilan tanishishga kirishamiz.

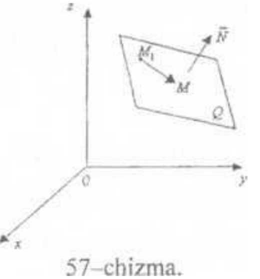
12.2. Berilgan nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi

Oxyz fazoni hamda unda berilgan Q tekislikni qaraymiz.

2- ta'rif. Tekislikka perpendikulyar vektor tekislikning **normal** vektori deb atalad

Tekislikning bitta *M\(X]\y};z\)* nuqtasi hamda normal vektori *N = {A\B\C}*

berilganda uning tenglamasini keltirib chiqaramiz (57-ch *M(x;y;z)* Q tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. *M* — *(x*-x,)z + *(y-y})j* + *(z-z,)*A vektorni qaraymiz. Bu vektor Q tekislikda yotadi. *N* vektor Q tekislikka perpendikulyar bo'lganligi uchun u shu tekislikda yotgan *M}M* vektorga ham perpendikulyar bo'ladi. Ikki vektorning perpendikulyar bo'lishi uchun ularni skalyar ko'paytmasi *M,M* Л/ = 0 bo'lishi



57–chizma.

yordamida berilgan ikki vektorni skalyar ko'paytmasini topish formulasi ga ko'ra muqqarrar edi. Koordinatalari

Л/,Л/ • = *A(x* - x,*)*+ *B(y*- y,) + *C(z* - z,) = 0

yoki /1(x-x,) +Sty-yJ + Ctz-z,) = 0 (12.2)

tenglikka ega bo'lamiz. Shunday qilib Q tekislikning ixtiyoriy A7(x;y;z) uuqtasining koordinatali (12.2) tenglamani qanoatlantirar ekan. O tekislikda yotmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi, chunki bu holda *M.M* va *N* vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lmaganligi uchun ularning skalyar ko'paytmasi noldan farqli, yani A/(.l/ A *0 bo'ladi.

Demak (12.2) tenglama Q tekislikning tenglamasi (12.2) tenglama berilgan u4tadan o'tuvchi **tekislik tenglamasi** deb ataladi.

nisb ShUnd3y har qanday tekislikka dekart koordinatalari *x, y,z* larga atan hirinchi darajali tenglama mos kelishini ko'rsatdik.

3— ta‘rif. Fazoning *M* nuqtasidan o’tuvchi tekisliklar to’plami **tekisliklar bog’lami** deb ataladi. *M* nuqta **bog’lamning markazi** deyiladi.

A,B,C koeffitsientlar har xil qiymatlarni qabul qilganda (12.2) tenglama markazi $A/_1(x_1;j-_);s|)$ nuqtada bo’lgan tekisliklar bog’lamining tenglamasini ifodalaydi.

1- misol. Л<(3;-2;1) nuqtadan *N* = *i* + *j-2k* vektorga perpendikulyar o’tkazilgan tekislik tenglamasi yoziisin.

Yechish. Bu yerda /1=1, 5=1, C=-2; jq=3, *y*\=-*2*, Z]=l. (12.2) formulaga binoan 1(x-3)+1(JH-2)+(-2)-(z-1)=0 yoki x+y-2z+l=0 tekislik tenglamasiga ega bo’lamiz.

12.3. Tekislikning umumiy ko’rinishdagi tenglamasi

Biz yuqorida tekislik tenglamasi dekart koordinatalari x,_y va *z* ga nisbatan birinchi darajali (chiziqli) tenglama ekanini ko’rdik. Endi aksini ya‘ni *x,y* va z ga nisbatan birinchi darajali har qanday tenglama tekislik tenglamasi ekanini ko’rsatamiz.

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (12.3)$$

tenglamaga ega bo’laylik. Bu yerdagi *A.B.C.D* ma‘lum sonlar bo’lib ulardan A,B,C koeffitsientlar bir vaqtda nolga teng emas. Aks holda biz tenglama emas balki *D=G* ayniyatga ega bo’lamiz.

C#0 deb faraz qilib (12.3) tenglamani

$$A(x-0) +B(y-0) + C(z + \sim) = 0 \qquad (12.4)$$

ko’rinishda yozamiz. Bu tenglamani (12.2) tenglama bilan taqqoslab u A/,| 0;0;--~'i

nuqtadan o’tib /V = Л» t-5/+CЛ normal vektorga ega tekislik tenglamasi ekanini ko’ramiz.

(12.3) tenglama **tekislikning umumiy tenglamasi** deb ataladi.

Endi tekislikning umumiy tenglamasining xususiy hollari bilan tanishib chiqantiz.

1. Ozod had *D=0* bo’lsin. Bu holda tekislik tenglamasi Ax+By

ko’rinishga ega bo’ladi. x=0, y=0, s=0 bu tenglamani qanoatlantirgani uc tekislik koordinatalar boshi 0(0;0;0) nuqtadan o’tadi. Denial tenglamasining ozod hadi nolga teng bo’lganda tekislik koordinatalar o o’tar ekan. t i i bin-

2. Tenglamada dekart koordinatalari oldidagi kocffilsientlaK ^a^.|ajj. masalan C 0 bo’lsin. Bu holda tenglama *Ax • By ' D--0* ko’rinishga e»^a^

C = $pr_{tK}N$ - 0 dan /V normal vektorning Os o’qqa perpendikulyarligi va |j_s|jkde Os o’qqa parallelligi kelib chiqadi. Agar *Ax+By+D=0* ^ter,^gl^anian^'n^'qaray^^ qarasak u to’g’ri chiziqning umumiy tenglamasini ifoda etadi. ^o’ylab ^eS' holda Os o’qqa parallel tekislik Oxy tekislikni ana shu to’g’ri chiziq эд o’tadi.

Shunga o’xshash *Ax+Cz+D-0* tekislik Oy o’qqa parallel, $By+Cz+D=0$ tekislik esa Ox o’qqa parallel ekanligini ko’rsatish mumkin: agar tekislik tenglamasida dekart koordinatalari x,y,z lardan qaysi biri qatnashmasa tekislik o’sha koordinataga mos o’qqa parallel bo’ladi.

3. Tenglamada dekart koordinatalari oldidagi koeffitsientlardan biri va ozod had nolga teng, masalan C=£)-0 bo’lsin. Bu holda Jx-t *By~0* tenglama 1-bandga asosan koordinatalar boshidan o’tadi va 2-bandga ko’ra u Oz o’qqa parallel bo’lishi lozim. Demak $Ax+By=0$ tekislik Oz o’q orqali o’tadi.

Shuningdek $By+Cz=0$ va *Ax+Cz-0* tenglamalarga Ox va Oy o’qlar orqali o’tuvchi tekisliklar mos keladi.

4. Tenglamada dekart koordinatalari koeffitsientlaridan ikkitasi nolga teng bo’lsin. Masalan, $A=B=0$. Bu holda Cz+D“0 tekislik 3-banddagi mulohazaga ko’ra ham Ox o’qqa, ham *Oy* o’qqa parallel bo’ladi. Demak u *Oxy* tekislikka parallel bo’ladi. Shuningdek $Ax+D=0$ va *By+D-0* tekisliklar *Oyz* va Oxz koordinata tekisliklariga parallel tekisliklaming tenglamalaridir.

5. Tenglamada ikkita dekart koordinatalarining koeffitsientlari hamda ozod had nolga teng bo’lsin. Masalan, $A=B=D=0$. U holda tenglama *Cz~0* yoki z=0 ko’rinishga ega bo’ladi. 4-banddagi mulohazalarga ko’ra u Oxy tekislikka parallel. 1-bandga asosan u koordinatalar boshidan o’tadi. Demak z-O-Oxy tekislikning tenglamasi. Shuningdek y=0-0xz tekislikning tenglamasi, *x~0-0yz* tekislikning tenglamasidir.

12.4. Tekislikni uning tenglamasiga ko’ra yasash

Tekislikning ma‘lum tenglamasiga ko’ra uni yasash qiyin emas. Buning uchun tekislikning bir to’g’ri chiziqda yotmaydigan uchta ixtiyoriy nuqtasini bilish kifoya. Tekislikning nuqtasini uning *Axi By+Cz+D^O* tenglamasidagi koordinatalardan ixtiyoriy ikkitasiga ma‘lum qiymatlar tayinlab uchinchi koordinatani shu tenglamadan aniqlash orqali topiladi.

Agar tekislik koordinata o’qlariga parallel bo’lmasa tekislikni koordinata o’qlari bilan kesishish nuqtalarini topgan ma‘qul.

2- misol. 3x+6y~2s-12=0 tekislik yasalsin.

Yechish. Tekislikni koordinata o’qlari bilan kesishish nuqtalarini aniqlaymiz. Ox o’qning nuqtalari uchun y=0, z=0 bo’ladi. Bularni berilgan tenglamaga qo’ysak 3x-12=0, x-4 bo’ladi. Demak tekislik Ox o’q bilan /l(4;0;0) nuqtasida kesishar ekan (58 - chizma).

Tenglamaga x=0, y=0 qiymatlarni 4U ysak 2/.-12-0, z-6 kelib chiqadi. Demak tekislik Oz o’q bilan C(0;0;6) nuqtada kesishar ekan. Agar tenglamaga B'ᵛ'0^=0 qiymatlarni qo’ysak 6y-l?.=0,

- kelib chiqadi. Demak tekislik Oy I ek^ ^(012;0) nuqtada kesishar

.. an Shunda Y berilsan tekislik

I ml ;л0)’ ™ c(o;o;6) / \ » ■

; Ulardan o’tar ekan (58 - chizma). /

X"

58 - chizma

3- inisol. Oz o’qqa parallel hamda 4|(2;3;-l) va Z?i(-1;2;4) nuqtalardan ivchi tekislik tenglamasi yozilsin va tekislik yasalsin.

Yechish. Oz o’qqa parallel tekislik tenglamasi *Ax+By+D=0 (a)* rinishga ega ekanligini ko’rdik (Oz o’qqa parallel tekislik tenlamasida г ardinita ishtirok etmaydi).

■Agar tekislik biror nuqtadan o’tsa bu nuqtaning koordinatalari o’sha tekislik lglamasini qanoatlantiradi. Tekislik tenglamasi (a) ga *A* va *B* nuqtalarning ordinatalarini qo’yib

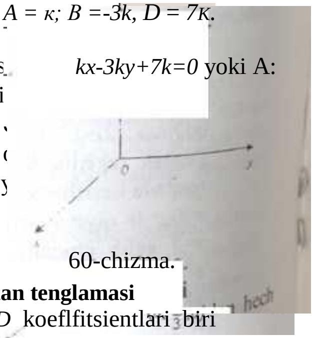
f2/4 + 3B + D = 0,

[- A + 2B + D = 0

stemaga ega bo’lamiz. Bu sistemani uch noma‘lumli ikkita bir jinsli chiziqli nglamalar sistemasini yechimini topish formulasidan foydalanib yechamiz.

$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot k;\ B$ 1 2 / 1-1 ■*k;D =* ■*κ; A = κ; B =-3k, D = 7κ.*

A, B va *C* ning topilgan qiymatlarini (a) ga qo’ys *kx-3ky+7k=0* yoki A: qisqartirilsa л-3y+7=0 tekislik englamasi kelib chi Tekislik Олу ekislikni *x-3y+7=0* to’g’ri chiziq bo’ylab o’tadi(59-chizma). Shuning uchun ekislikni chizishdan to’g’ri chiziqni shizamiz. Tenglamaga x=0 qiymatni qo’y



........................7............................. *J*

60-chizma.

-3y+7=0, *y* = - va *y=0* qiymatni qo’ysak *x~-7*

12.5. Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi

kelib chiqadi. Demak to’g’ri chiziq *Oxy* tekislikning Ba ("?$) nuqtalaridan o’tar

Tekislik tenglamasi *Ax+By+Cz+D=0* da *A,B,C,D* koeflfitsientlari biri nolga teng bo’lmasin.

Ozod had *D* ni tenglamaning o’ng tomoniga o’tkazsak

59-chizma

ekan.

4- misol. *A(* 1 ;2;4) nuqtadan o’tib *Oxy* tekislikka parallel tekislik tenglamasi yozilsin va tekislik yasalsin.

Yechish. *Oxy* ga parellel tekislik tenglamasi *Cz+D=0* ko’rinishiga ega ekanligini bilamiz. Bunga *A* nuqtaning koordinatalarini qo’yib 4C+D=0, D=-4C ga ega bo’lamiz. D ning ushhu qiymatini tekislik tenglamasiga qo’ysak Cz-4C=0 yoki C ga qisqartirsak Z-4-0; Z=4 hosil bo’ladi(60- chiznia).

Bu tenglama J(I;2;4) nuqtadan o’tib *Oxy* tekislikka parellel tekisiik tenglamasi.

$$Ax+By+Cz=-D$$

bo'ladi. Bu tenglamani har ikkala tomonini $-D$ ga bo'lsak

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1$$

hosil bo'ladi.

_D_ A~°' belgilashni kiritsak tekislik »--b. в

tenglamasi

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (12.5)$$

ko'rinishiga ega bo'ladi. Bu tenglama **tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi** deb ataladi. Bu yerdagi a,b,c лар текисликнинг 0x,0y,0z o'qlardan ajratgan kesmalari.

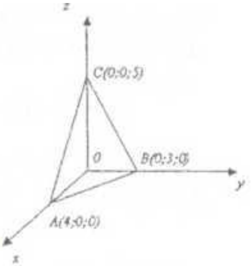
5- misol. 15x+20y+12z-60=0 tekislik yasalsin(61-chizma).

Yechish. Tekislik tenglamasini kesmalarga nisbatan yozamiz: 15x+20y+l2z=60;

$$\frac{15x}{60}+\frac{20y}{60}+\frac{12z}{60}=1,$$

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1; \quad a=4,\ b=3,\ c=5.$$

Demak tekislik Л(4;0;0), Z?(0;3;0) va C(0;0;5) nuqtalardan o'tar ekan.



61–chizma.

12.6. Uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi

Bir to'g'ri chiziqda yotmagan $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ va $M_3(x_3,y_3,z_3)$ nuqtalar berilgan bo'lib ular orqali o'tuvchi tekislik tenglamasini topish talab etilsin. $M(x,y,z)$ tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda:

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1)\vec{i}+(y-y_1)\vec{j}+(z-z_1)\vec{k},\ \overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k} \text{ va}$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1)\vec{i}+(y_3-y_1)\vec{j}+(z_3-z_1)\vec{k}$$

vektorlar shu tekislikda yotadi, ya'ni ular komplanar bo'ladi. Uch vektorning komplanarlik sharti $(\overrightarrow{M_1M}\times\overrightarrow{M_1M_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0$ ga binoan

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (12.6)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama **uch nuqtadan o'tuvchi** tekislik tenglamasi.

6 misol. $M_1(1;2;-1)$; $M_2(-1;0;4)$; $M_3(-2;-1;1)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi topilsin.

Yechish. (12.6) formulaga binoan izlanaetgan tekislik tenglamasini

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & \\ -2 & -2 & \\ -3 & -3 & \end{vmatrix}=0$$

o’rinishda yozamiz. Detcrminantni birinchi satr elementlari bo’virk

1-2 5 -2 1 -2 5 | (x-1) | -2 5 | (v-2) + | -2 -2 |

j-3 2 (A -3

'oki ikkinchi ı,3 2 | | -3 2 | | -3 -3 |

tartiblideterminantlarni hisoblasak

11(x-l)-l l(y-2)+0-(+ j /a tenglikni 11 ga qisqartirib ixchamlasak x-1 ->4-2=0; x-y+l=0

™

<el ib chiqadi. Bu tenglama Oz o’qqa parallel tekislikni aniqlaydi.

12.7. TekisIikning normal tenglamasi

Qxyz fazoda koordinatalar boshidan o’tmovchi Q tekislik beril И Koordinatalar boshidan tekislikka OP perpendikulyar o’tkazib unin» ^о 'Sln- orqali va perpendikulyarning Ox, Oy, 0c o’qlar bilan tashkil etgan burchaM^1'^111 p ravishda a,|3,y lar orqali belgilaymiz. U holda tekislik tenglamasini аг'П| rt1Os xcoscr + ycos/? + r cos y - *p* = 0(12.7) ko’rinishda tasvirlash mumkin bo’ladi. (12.7) tekislikni normal tenglam ataladi. Bu tenglamaning o’ziga xos xususiyatlaridan biri $\cos^2$ *a 4-n* *aSl deb* p+cos-y = i va p>0.

Agar tekislik

Ax+By+Cz+D=Q

umumiy ko’rinshidagi tenglamasi yordamida berilsa bu tenglikni nortnallovch ko’paytuvchi debataluvehi

± J,r + *в*^{2}+*c*-

ga ko’paytirish natijasida tekislikning normal tenglamasiga keltiriladi Normallovchi ko’paytuvchining ishorasi ozod hadning ishorasiga qarama qarshisi olinadi.

лМ^2 + Я^2 + С^2 V.4^2 + /?^{2}+С^2 7л^2 + й-’+С^2 *У!Л*^{2} + *В*'+*С*-

tekislikning normal tenglasini va

(12.8)

J//- + /Г rC

koordi natal ar boshidan *Ax* * /Зг ■ (*"z Г*) 0 tekislikga cha masofani ifodalaydi.

7-misol. 5x+7y-34c^{1}5=0 tekislik tenglamasi normal ko’rinishga к$^{e*1'l\,1}$^п. uchun normallovchi ko’paytuvchi No ^{1} A=5. 3=7 C=-34 bo’lgani sabaN

Berilgan tenglamani bunga ко paytirsak

Yechish. Ozod had 5>0 bo’lgani minus ishora olinadi.

,, 1

5 7 34 . \ o

Jp30 ' уТ?30$^?$ ' x/1230" Ji 230

tekislikning normal tenglamasi kelib chiqadi. **8-misol.** Koordinatalar boshidan 10x+15y-6z-. topilsin va shu • s" ■' perpendikulyarning koordinata o’qlari burchaklari)ingkosinuslari topilsin.

Yechish- Ozod son-380<0 bo’lganligi uchun normallovchi ko’paytuvchi t j'rio nlvus ishora olinadi. .V — —-— - - — .

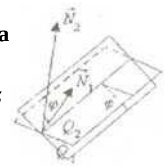
oldi[da]P- -/io $+15^2+(-6)^2$ V361 19

(12.8) formulaga binoan koordinatalar boshidan tekislikgacha rnasofa

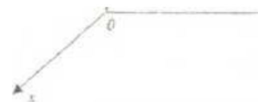
1-380] _ л80 _ 2Q bo'iajj. Endi burchak kosinuslarini topamiz:

$$\cos t? = \frac{A}{N} = \frac{10}{19}, \quad \cos/? = \frac{B}{N} = \frac{15}{19}, \quad \cos/= \frac{C}{N} - \frac{6}{19}.$$

12.8. Ikki tekislik orasidagi burchak. Tekisliklarning pa perpendikulyarlik shartlari



Kesishuvchi 0, va O_2 tekisliklar mos ravishda $A_jx + B_jy + C_{(}z$ (□.tekislik) va Л,x + + $C_2z + O_2 = 0$ (□ tekislik) tenglamalari yordamida berilgan bo’lsin. Ikki tekislik orasidagi burchak deganda tekisliklar tashkil etgan ikki yoqli burchaklardan biri tushuniladi. Q, va Q_2 tekisliklarning normal vektorlari $N\backslash$ va W_2 orasidagi burchak ana shu burchaklardan birini ifodalaganligi uchun tekisliklar orasidagi burchakni topish ularning normal vektorlari orasidagi burchakni topishga keladi (62-chizma).



62–chizma.

$$,'V. - Л, / + B_t j + C\backslash k \text{ va } N, = A,i + B,j + C_2k$$

vektorlar orasidagi burchak

$$\cos y = —-+ \quad ... \quad (] 2.9)$$
$$V\ 4* ^+ + C,^2 \text{ v } A_2 + Л^2 + C;$$

formula yordamida topilishini bilamiz. Ana sha formula Q] va Q_2 tekisliklar orasidagi burchakni topish formulasi bo’lib xizmat qiladi.

topilsin m'S0*' 5-v-3y+4r-4-0 va 3x-7y-2-+5-0 tekisliklar orasidagi o’tkir burchak (1? оч^[ec]h'[sfl] Bu yerda Л|~5, /?|=-3; C|=4; zh-3, £?->=-4, C->--2 bo’leani uchun formulaga binoan: “

$$\kappa_{,,,} \quad \left.\frac{5\text{-}3 + (-3).\text{-}4) + 4\,(-2)}{^f5^{:} +(\,3)^{:} + 4^2 \bullet >/з^2 + (-4)^2 + (-2)^2}\right| \quad \frac{15 + i2\text{-}8|.}{V50V29\ г}$$

$$\text{COS}^\wedge \quad = 0.4900 := 60‘'04\,.$$

$$\text{cos } 42 \overset{\mathrm{I}}{-} |-$$

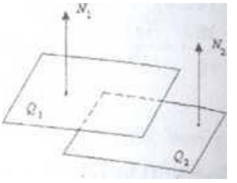
f[orni]ulanj[no] [olas]'^[a]S> o’tkir burchakni topish talab etilganligi sababli (12.9) l.Tekisijij [ton]][on]*d[a]gi ifodani absolyut qiymatini oldik.

[nor]ma| vektori sharti. Q_t va Q_2 tekisliklar faqatgina ularning 'sanlipjj [ar]* V| = 4'+ $^B\backslash J + Ctk$ va ЛЛ - $A.i + B.j + C_z\sim\kappa$ parallel (kollinear) [§,da] Parallel bo’ladi (63-chizma). '

Shuning uchun ikki vektorning parallellik shartidan

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (12.10)$$

ga ega bo'lamiz. Bu tekisliklaming ham parallellik shartidir. Demak ikki tekisliklaming mavjud koordinatalari oldidagi koeffitsientlari proporsional bo'lganda va faqat shu holdagina ular **parallel** bo'lar ekan.



63 - chizma

Endi berilgan A/i(xi;yj;z|) nuqtadan *Ayx+B^y+Cyz+D^O (a)* tekislikka parallel o'tkazilgan tekislik tenglamasini topamiz. Buning *M^xcy^z/)* nuqtadan o'tuvchi uchun tekislik tenglamasini yozamiz. Uning /l(x-Xi)+/3(y-y_1)+C(Z-5,)=0 (/?)

ko'rinishga ega ekanligi ma'lum. Bu tekislik berilgan (a) tekislikka parallel bo'lishi uchun

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$$

shart bajarilishi kerak. Demak

$$A=A_1, B=B_1, C=C_1$$

deb olishimiz mumkin. Ushbu qiymatlarni tekislik tenglamasi (/?)ga qo'yib *A\(x-X\)+B\(y-y\)+Ci(z-Z])=0* (12.11) tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama berilgan **tekislikka parallel o'tkazilgan tekislik tenglamasi**

10-misol. Koordinatalar boshidan *x+y+z=l* tekislikka parallel o'tkazilgan tekislik tenglamasi tuzilsin.

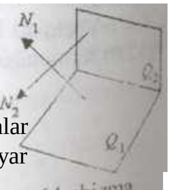
Yechish. Bu yerda X]=y]=zi=0 va Ji=B|=C|=l bo'lgani uchun (12.11) ga binoan *x* t-y *'rz=0* tenglamaga ega bo'lamiz.

2.Tekisliklarning perpendikulyarlik sharti. Ikki tekislik ularning normal vektorlari va Y, o'zaro perpendikulyar bo'lgandagina perpendikulyar bo'ladi(64-chizma).

Ikki vektorning perpendikulyarlik shartiga asosan

Л,.$4_2$4-^{1}^2-ьC|C_3=0 (12.12)

ega bo'lamiz. Bu ikki tekislikning formulaga perpendikulyarlik shartidir.



64-chizma

Endi berilgan ikkita ЛУ^x^y^Г]) va /W_2(x_2;y_2;z_2) nuqtalar orqali o'tuvchi va zl^r /Луч Сй ;/?i~0 tekislikka perpendikulyar tekislik tengmasini topamiz.

A/i(Xiiyi^i) nuqtadan o'tuvchi istalgan tekislik /l(x-x, tenglamasini yozam *)+B(y-y,)+C(z-z,)=0* ko'rinishiga ega bo'ladi. Shartga binoan Л/2(x2,y2,z2) nuqta yotganligi uchun uning koordinatalari tekislik tenglamasini 4anoa

.1(X_2-X|)+/?(y2-y|)-ьC(5_3-7|)=0. |

(12.14)

Ikkinchi tomondan (12.13) tekislik berilgan tekislikka perpendikulyar bo'lganligi uchun

$$AAi+BB^CC^O \qquad (12.15)$$

clpendikulyarlik sharti bajariladi. (12.14) va (12.15) ni birlashtirib |/(x2-x1)+fi(.y2-yl) + C(z2-z1) = 0> [/Ц + + CC, = 0 k '

sistemaga ega bo'lamiz. (12.16) dan *A,B* va *C* koeffitsientlardan istalgan ikkitasini uchinchisi orqali ifodalab ularni topilgan qiymatlarini (12.13) tenglamaga qo'yib tenglamani uchinchi koeffitsientga qisqartirilsa izlanayotgan tenglama kelib chiqadi.

11- **inisol.** A/|(l; 1; I) va Л/2(0; 1; -1) nuqtalar orqali o'tuvchi va x+^+z=0 tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasi topilsin.

Yechish. AY)(1; 1; 1) nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi

Л(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0 (y)

bo'ladi. Tekislik Л/2(0;1;-1) nuqtadan o'tishi va berilgan x+>'+z=0 tekislikka perpendikulyarlik sharti (12.16) ga binoan

M(0-l) + S(l-D + C(-l-l) = 0, ,.[-Л-2C = 0, [Л + 2C = 0,
Г ' yoki <1 ; 1 ga ega
(Л-] + £1 + C-1 = 0 [*A* + *B* + *C* = 0 [*A* + *B* + *C*-0

bo'lamiz. Sistemaning birinchi tenglamasini *A=-2C* ko'rinishda yozib uni *C* ga bo'lsak = -2 bo'ladi. Sistemaning ikkinchi tenglamasini *C* ga bo'tsak

—+ 1 = 0; —= ---! =-(-2)-l = 1
c c c c

hosil bo'ladi. Tekislik tenglamasi (y) ni C ga bo'lib va o'rniga ularning topilgan qiymatlarini qo'ysak izlanayotgan tenglama hosil bo'ladi:

— (x-l) + —(y-l) + z-l =0; - 2(x-1) +1 ■ (y-1) + z -1 = 0;

- 2л■ + 2 + *y* -1 + *z* - 1 - 0; 2x - *y* - *z* - 0 .

12.9. Uch tekislikning kesishish nuqtasi

Berilgan uchta ,4|X-i J3ty+C'|Z+D(=0, ^jx+^^y+Qz+^^O va ^зx+Bз^+Cзг-! £)3=П tekisliklarning kesishish nuqtasi.

(*A,x* + *B.y* + C,z + D, = 0,
I L.v I- Ry > C.z + D. ■■■ (1
[j,.v + Rv + C.z + D, = 0.

•s emani yechib topiladi. Sistemaning asosiy determinant!

nuqtadaj< S,Stema Уa§ona yechimga ega bo'ladi •1, 6', *C*\ va berilgan uchta tekislik bir E- a esis hadi. A=0 bo'lganda tekisliklar bir *A*2 *B*, *C*,nuqtada kesismaydi.

A, *в*, c,

12- **misol.** 2x-y+3z+2=0, x+2y-z-9=0 va 3x+y-2z-ll=0 tekisliklari • kesishishi nuqtasi topilsin.

Yechish.

(2x-y + 3z = -2,
x + 2y-z = 9,
|3x + y-2z = 11 sistemani yechib tekisliklarning kesishish nuqtasining koordinatalari x=2, y=з larni topamiz. Demak tekisliklar Л/(2;3;-1) nuqtada kesishar ekan.

12.10.Nuqtadan tekislikgacha masofa

Nuqtadan tekislikgacha masofa deganda shu nuqtadan tekislikka tushiril perpendikulyarning uzunligi nazarda tutiladi.

Berilgan A7|(xi;yt;Z]) nuqtadan *Ax+By+Cz+D=0* tenglamasi yordamida berilgan *Q* tekislikgacha *d* masofa

JXx,+gy,+Cz, + D} /1П 1ПЧ

$$4\sim A^2 + B^2+C^2$$

formula yordamida topiladi. Bu formulani kcltirib chiqarish tekislikda nuqtadan to’g’ri chiziqgacha masofani topish formulasini keltirib chiqarishga o’xshaganligi uchun uni isbotlashni o’quvchiga qoldiramiz.

13-misol. Л(2;3;-1) nuqtadan 7x-6y-6г+42=0 tekislikgacha masofa topilsin.

Yechish. (12.17) formulaga /1=7, *B=-6,* C=-6, D-42, xt=2, y,=3, z|=.| qiymatlarni qo’ysak izlanaetgan masofa

tenglamasi topilsin. Javob: (J = 7-2 r(-6)-3 +(-6) (-D +42 / ^2+(-6)2+(-6)2 | J14-18 + 6 + 42 / i V12T | —=4 / 11

kelib chiqadi.

Mustaqil yechish uchun mashqlarva test savollari

1. Л/|(3;2;-1) nuqtadan o’tib W = {-l;0;2} normal vektorga ega tekislik tnglamasi yozilsin. Javob: x-2z-5=0.
2. /l(2;-3;2) va /3(7;l;0) nuqtalar orqali o’tuvchi va Ox o’qqa parallel tekislik tenglamasi topilsin. Javob: y+2z-l=0.
3. J(-3;2;4) nuqtadan Oxy tekislikka parallel o’tkazilgan tekislik tenglamasi yozilsin. Javob: c-4=0.
4. .4(2; 1;3) nuqta hamda Ox o’q orqali o’tuvchi tekislik tenglamasi yozilsin. Javob: Jv-r'-O.
5. 2x+3y-5j+30=0 tekislik koordinata o’qlardan qanday kesmlai ajratadi- Javob: <7=-15, *b*- -10, c=6.
6. 3x 4r:-5_--24=0 tekislik tenglamasi kesmalarga nisbatan yozibi'1-

Javob: - + — + —- = 1.
8 -6 4-8

7. ЛУД 1 ;-3;4), A/3(0;-2;-l)va AV3(1;1;-1) nuqtalardan o’tuvchi tekis|ik

15x-5y-4z-14—0.

8. a) 4x+3y+6z-12=0; b) 2x+3y-6=-0; d) 2z-5=0 tekisliklar yasalsin.

9. 2x+9y-6z+33=0 tekislik tenglamasi normal ko'rinishga keltirilsin.

10. Koordinatalar boshidan 5x-jH-3z+12=0 tekislikka perpendikulyar o'tkazilgan. Uning uzunligi, koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklari kosinuslari va perpendikulyarning asosi topilsin.

Javob: $p=\frac{12}{\sqrt{35}}$; $\cos\alpha=-\frac{5}{\sqrt{35}}$; $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{35}}$; $\cos\gamma-\frac{3}{\sqrt{35}}$, perpendikulyarning asosi $P\left(-\frac{12}{7},\frac{12}{35},-\frac{16}{35}\right)$.

Ko'rsatma. Perpendikulyarning asosi *x\~-pcosa, y\=pcos[i, z\-pcosy* formulalardan foydalanib topiladi.

11. Л(2;-4;2) nuqtadan 2x+l ly+10z-l0=0 tekislikgacha rnasofa topilsin. Javob:d=2.

12. 2x-3y+6z-14=0 va *2x-3y+6z+28-0* parallel tekisliklar orasidagi rnasofa topilsin. Javob: d~6.

13. Л/(-4;-1 ;2) nuqtadan 3x+4y-c-8=0 tekislikka parallel o'tkazilgan tekislik tenglamasi topilsin. Javob: 3x+4y-z+l8=0.

14. ЛА(-1;2;-3) va Л/$_2$(1;4;-5) nuqtalar orqali o'tuvchi va 3x+5y-6z+l=0 tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasi topilsin. Javob: x-3y-2z+l=0.

15. 5x-3y+5z+5=0 va x-2y+3z-5=0 tekisliklar orasidagi o'tkir burchak topilsin. Javob: cos(p=0,9046; <p=25°14'.

16. Tekislikning normal vektori nima?

A)Tekislikka parallel vektor

BJTekisIikda yotuvchi vektor

D) Tekislikka perpendikulyar vektor

E) Tekislik bilan 45° burchak tashkil etuvehi vektor

F) Istalgan vektor.

17. Tekislikning normal tenglamasini ko'rsating.

A) 2x-3y + 5r + 2-0 B) -x--y + -z + 3 = 0 D) -x--y+ -z-3 = 0 E)
7 7'7 7 1' 7

$\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}y-\frac{2}{7}z+3=0$ F) $\frac{2}{7}x+\frac{6}{7}y-\frac{3}{7}z+4=0$

18. mx + 3y + 2--9 = 0 va 2x + »y+ 3z-6 = 0 tekisliklar m va n ningqanday 4'ymatlarida o'zaro parallel bo'ladi.

A) -y 9 B) 4 5 г» 1 4 E) 3: 2 F) 2; -1.
-> 2 5 2.23

*9. пк + 5гч 3z 8 - 0 va /7jx+ 2wv + 3z 16 - 0 tekisliklar m ning qanday fl'ymatlarida o'zaro perpendikulyar bo'ladi.

va I B) 1 va -9 D) 3 va -1 E) -1 va 4 F) -9 va 5.

•w(6;0;-2) nuqtadan 6x-3y-2z-5 = 0 tekislikgacha rnasofa topilsin.

A)3 B)4 D)5 E) 4,2 F) 4,5.

O'z – o'zini tekshirish uchun savolla

2 R;rt 1S lk<4a enrc chizicl tenglamasi nima?

3 Wamasi nima'

•• vanday vektnr y vektor tekislikning normal vektori deb ataladi?

4. Berilgan nuqtadan o’tuvchi tekislik tenglamasini yozing.
5. Tekislikning umumiy tenglamasini yozing.
6. Umumiy tenglamaning xususiy ko'rinishlariga izohlar bering.
7. Tenglamasiga ko’ra tekislik qanday yasaladi?
8. Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamsini yozing.
9. Uch nuqtadan o’tuvchi tekislik tenglamasini yozing.
10. Tekislikning normal tenglasini yozing va uning asosiy xususiyatini aytin»
11 .Tekislikning umumiy tenglasini qanday qilib normal ko’rinishiga keltiri|ac|p Normallovchi ko’paytuvchi nima va u qanday topiladi?
12. Koordinatalar boshidan tekislikkacha masofa qanday topiladi?
13. Koordinatalar boshidan tekislikka o’tkazilgan perpendikulyarning koordinata o’qlari bilan tashkil etgan burchaklari hamda perpendikulyarning asosi qanda topiladi?
14.Ikki tekislik orasidagi burchak qanday topiladi?
15.Ikki tekislikning parallellik sharti nima?
16.Berilgan nuqtadan berilgan tekislikka parallel o’tkazilgan tekislik tenglamasini yozing.
17.Ikki tekislikning perpendikulyarlik shartini yozing.
18. Berilgan ikki nuqtalar orqali o’tuvchi va berilgan tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasi qanday topiladi?
19. Uchta tekislik qaehon bir nuqtada kesishadi va bu nuqta qanday topiladi?
20. Nuqtadan tekislikgacha masofa qanday topiladi?

13- ma‘ruza. Mavzu: Fazodagi to’g’ri chiziq. To’g’ri chiziq bilan tekislik orasidagi niunosabat

Reja:

1. To’g’ri chiziqning kanonik tenglamalari.
2. To’g’ri chiziqning parametrik tenglamalari.
3. To’g’ri chiziqning umumiy tenglamalari.
4. Ikki nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasi.
5. Ikki to’g’ri chiziq orasidagi burchak. To’g’ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.
6. To’g’ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak. To’g’ri chiziq bilan tekislikning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.
7. To’g’ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasi.
8. Tekisliklar dastasi.

Adabiyotlar: 3,5,7,10,11,14,15,16.

Tavanch iboralar: yo’naluvchi vektor. parametr, tekisliklai I dastaning o’qi.

13.1. To’g’ri chiziqning kanonik tenglamalari

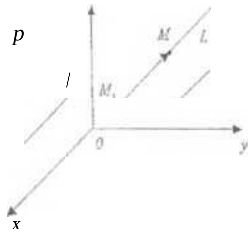
O.vyz fazoni va unda berilgan Л to’g’ri chiziqni qaraymiz. , c|1jziqni t1=

1-ta‘rif. To’g’ri chiziqqa parallel vektor shu to g rl p,oordinat a **yo’naltiruvchi** vektori deb ataladi. Yo’naltiruvchi vektorning !eП(|яГ‘ o’qlaridagi proeksiyalari to’g’ri chiziqning **yo’naltiruvchi ко**

deyiladi. To'g'ri chiziqning bitta M^x^y^Zi) nuqtasi hamda yo'naltiruvchi $ = ш»+и/ + рЛ vektori ma'lum bo'lganda uning tenglamasini keltirib chiqaramiz. *M(x. y,z)* to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda

= *(x-x_l)i* + *(y-y_t)j* + *(z-z,)k* va 5 vektorlar parallel bo'ladi(65-chizma).

Parallel vektorlarni mos koordinatlari proporsional bo'lganligi sababli 1zA = Zz2L = £z£L (в.]) *in* *n* *p* tenglamaga ega bo'lamiz. Demak, berilgan L to'g'ri chiziqning istalgan M nuqtasining koordinatlari (13.1) tenglamani qanoatlantiradi. L to'g'ri chiziqda yotmagan hcch bir nuqtaning koordinatlari (13.1) tenglamani qanoatlantirmaydi, chunki bu holda M_tM va 5 vektorlar parallel bo'lmagani uchun ularning mos koordinatlari proporsional bo'lmaydi.



65-chizma

Shunday qilib (13.1) tenglama L to'g'ri chiziqning tenglamasi ekan. U **berilgan nuqtadan o'tuvchi** to'g'ri chiziq tenglamasi yoki to'g'ri chiziqning **kanonik tenglamalari** deb ataladi.

13.2. To'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari

(13.1) dagi nisbatlarni t orqali belgilaymiz. U holda -—~_t

in

munosabatdan л-X| = *mt, x~* _X| +*mt* kelib chiqadi. Shuningdek -—— = *t* dan *n*

y-y\+nt, —TJ- / dan *z* = *z.* + *pt* tengliklarni hosil qilamiz.
P

Shunday qilib

.v = A", + *mt,*

y = y, + *nt,* (13.2)

z = z, + pZ

tengliklarga ega bo'ldik. (13.2) to'g'ri chiziqning **parametrik tenglamalari** deb aaladi. Bu yerda z parametr deb ataladi va istalgan qiymatlarni qabul qiladi. arametr / o'zgarganda *M(x.y,z)* nuqtaning koordinatalari ham o'zgaradi va u 0 & ri chiziq bo'ylab siljiydi.

Agar lo'g ri chiziq parametrik tenglamalari yordamida berilsa ulardan t ^umk^rn* У° 40tib t0›g'ri chiziqning kanonik tenglamalarini hosil qilish

IzoBi. ——— = л' ———va j: Ji' tengiamalar ,nos

/M n VJry

tekislikdagi Л/0(x,,;л) nuqtadan o'tuvchi
va J = {w; ,,} yo'nalti 1
ega to'g'rw chiziqning kanonik va parametrik tenglamalaridir. *rUVChl Vek' or ga

... ., I13,3, , , T,,,8,r , chizi4"'"g umumiy tenglamalari

Ikk_ita chiziqli tenglamalar sistemasi

fj.v + ^r + C^ + D, =o.

I Ал- +■ B,y + c,2 + D, = 0 (133)

ni qarayrmiz. Sistemaning har bir tenglamasi tckislikni ifod -I tekisliklaw parallel bo'lmasa ular qandaydir L to'g'ri chizin . ,ydi- Ag; Shuning uchun (133) tenglamalar sistemasi to'g'ri ch; ◦ У1аЬ kes«^7 tenglamalari deb ataladi. " IZ1qning umut)^ A§ar bu

Endi to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalariga ko'ra r*. -^•shad

u.i—*—:_t— ■ — . i 1 uning umumi'.

tenglammlarini topish usuli bilan tanishamiz. (13.1) tenglama л-x, dagi uchiinchi = tenglik (13.1') dan

y-y,

I nt n

y~y> = (13.1') yoki =

n p

!□O'-y,) = >>(r-r.) П3.1)

ko'rinishdagi ikkita chiziqli tenglamalar sistemasiga teng kuchli, chunki (13 ц

kelib chiqadi.

Sffriuningdek (13.1) tenglama

I m n ' va w— '~'1 p

Z_2i = ' A

« P />

bo'ladi. (13.1') sistemaning birinchi sisteniafiarning har biriga teng kuchli tenglairuasi etmaydi. Demak u Or o'qqa parallel sistemaning ikkinchi tenglamasi da r ishtirok

m n

tekislik tenglamasi. Shuningdek (13.1') da x

ishtirok etmaganligi uchun и 0л o'qqa parallel tekisb t< mglamiasini ifodalaydi. I3n tekisliklar kesishishi natijasida kesimda to g ri c hosil bo'ladi. (13.Г) yoki (13.1") tenglamalar sistemasi ana shu to'g ri C*1'.^nic uinuiiiiy tenglamasini ifodalaydi. Ya'ni (13.1') yoki (13") tenglamalar sis to'g'ri chiziqni ikkita tckisliklarning kesishish chizig'i sifatida aniqlayd'-

EEndi to'g'ri chiziq koordinata o'qlaridan biriga perpendikuM^;; holni «qaraymiz. Faraz qilaylik to'g'ri chiziq 0л o'qqa perpendikulyar holda shu to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori 5 = {/я,".p) perpenodikulyar bo'lib /// 0 bo'ladi. Bu holda (13.1") tenglamalar sister

Iˣ ˣ‹ ○ yoki f* ᴬ››

[pv - PY\ ~ ^{nz} ~ ^{nz}\ I PY ~ ^{nz} ~ PY\ $^{+ "z}$i = ^{0}

L siea aylanadi. Bular Ox o’qqa perpendikulyar to’g’ri chiziqning umumiy sister^{3} . - g_u h_0|(j_a ham umumiylikni buzmaslik uchun to’g’ri chiziq SlXini kanonik ko’rinishda te^{n}b x - X| _ y - _V| _ z - z.

On/?

$_{z}j_{s}$h mumkin. Shunday qilib to’g’ri chiziqning kanonik tenglamasidagi $^{kat››}$. L_{an} $q_a y_S$i birining maxraji no! bo’lsa uning suratini ham nolga tenglashtirib chiziqli ^{ten}§^{lainalar} sistemasi hosil qilinarekan.

Masalan -•~ = ~~~ tenglama nuqtadan o’tuvchi va

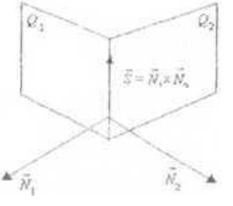
Ox o’qqa perpendikulyar to’g’ri chiziq tenglamasi, = = esa

M1(*|;Уь^{2}1) nuqtadan o’tuvchi va Oz o’qqa parallel to’g’ri chiziq tenglamasi.

Endi to’g’ri chiziqni chizish usuli bilan tanishamiz.

Faraz qilayiik to’g’ri chiziq umumiy tenglamalari yordamida berilgan bo’lib, uni chizish talab etilsin. Ma‘lumki to’g’ri chiziqni chizish uchun unga tegishli ikkita nuqtalarini bilish kifoya. Bu nuqtalarni koordinatlarini (13.3) sistemani yechish orqali topish mumkin. ((13.3) sistemani yechish usuli bilan tanishmiz.).

Endi to’g’ri chiziqning umumiy tenglamalari (13.3) dan kanonik tenglamalariga o’tish usuli bilan tanishamiz.



66~chizma

To’g’ri chiziqning kanonik tenglamalarini yozish uchun uning bitta A/I(A'I;>'I;Z|) nuqtasini hamda yo’naltiruvchi vektorini bilishimiz lozim.

nuqtaning koordinatalarini (13.3) sistemadagi oordinatalardan biriga ixtiyoriy qiymat berib sistemani yechish orqali topish mumkin.

F $^{Г› ch*zic}$l$^{n›n}$g yo’naltiruvchi vektori

sitahda

tekisliklarnir ing normal vektorlari

va A'_2 = } vektorlarning vektor ko’paytmasi

^{л} in olishimiz mumkin (66 chizma).

gi misol. To’g’ri chiziqning

[2.x + 3 v + $2z$ + 8 = 0,

^{Ur}numiy

^{Ve}<hhh$^{'n}$q$^{S1\ k\wedge nonik\ ko›rin}$ishga keltirilsin.

^{munil}y $teng_{lamas}j_p$; ^{ri} chiziqning aniq A/|(AJ:2т,) nuqtasini topish uchun uning I "‘sigaz=l $_{qi}$ymatni qo’ysak

|2x + 3y + 10 = 0,

10 = 0.

sistenia hosil bo’ladi. Sistemaning ikkinchi tenglamasini 3 ga ko’paytirib birinchi tenglamasiga hadlab qo’shamiz. U holda 5x-20=0; 5x=20 bo’lib bundan x=4 kelib chiqadi. Oxirgi sistemaning ikkinchi tenglamasidan j/=x-IO ga ega bo’lamiz. Bunga ,r=4 qiymatni qo’ysak j>=4-10 = -6 hosil bo’ladi.

Demak M_t(4; -6; 1) to’g’ri chiziqqa tegishli nuqta ekan. Endi to’g’$_r$j chiziqning .S = Л', x N_2 yo’naltiruvchi vektorini aniqlaymiz.

Misolda = *2i + 3j + 2k> N} -i-j-k,* bo’lgani uchun

1 *J к*
2 3 2
1-1-1

bo’ladi. Bu determinatni birinchi satr elementlari bo’yicha yoyib hisoblaymiz.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & \end{vmatrix} \quad 1\ I \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \quad j + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & \end{vmatrix}$$

yoki ikkinchi tartibli determinantlarni hisoblasak

S = -/ + 4y - *5k*

kelib chiqadi. Demak w= -1, /7=4, /?= -5, xi=4, -6, z= 1.

Topilgan qiymatlarni to’g’ri chiziqning kanonik tenglamalari (13.1) ga qo’ysak

$$\frac{x-4}{-1} = \frac{y+6}{4} = \frac{z-1}{-5}$$

tenglamalarga ega bo’lamiz. Bu berilgan to’g’ri chiziqning kanonik tenglamalaridir.

13.4.Ikki nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasi

va nuqtalar berilgan bo’lib ulardan o’tuvchi to’g’ri chiziqning kanonik tenglamalarni topish talab etilsin. Bu holda to’g’ri chiziqda yotuvchi *M,M₂ -■ (x₂ - x,)i + (y,-y\)J + (z₂-£,)£* vektorni uning yo’naltiruvchi vektori deb olishimiz mumkin.

Demak *m - x₂ ~x{,n* - y, - *y^p = z₂ z,* bo’lib (13.1) tenglama.

= (13.4)

y, -*y*, z₂-z*x* . , , ■ *Chiziq*

ko’rinishni oladi. (13.4) tenglama **ikki nuqtadan o’tuvchi to g** rl tenglamasi deb ataladi. >
’ri

2-misol. Л/|(3; 4; 2) va ЛЛ(3; -2; I) nuqtalarlan o’tuvchi **tog** tenglamasi yozilsin. ko’rinishda yozish mumkin.

Yechish. (13.4) formulaga asosan

x- 3 = .y -4 _ 2 oki = —
3-3 ' 2-4 '1-2 yo ‘ 0 -6 ldikulyarva

kelib chiqadi *nr 0* bo’lgani uchun to’g’ri chiziq Ox o’qqa perpen м tenglamasini

л-3. ——-----—- yoki < .

13.5. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. To'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari

Fazodagi ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak deganda fazoning istalgan nuqtasidan shu to'g'ri chiziqlarga paraliei o'tkazilgan to'g'ri chiziqlar tashkil etcan burchaklardan oiri nazarda tntiladi.

Faraz qilaylik fazodagi L] va L_2 to'g'ri chiziqlar mos ravishda

"1 w1 P\ m2 П2 Pl

kanonik tenglamalari yordamida berilgan bo'lsin.

Bu to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni topamiz L| bilan L_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklardan biri ularning yo'naltiruvchi vektorlari *$ - i+ n.j' + p.k* bilan S_2 - *m, i + n,j + p₂k* orasidagi burchak *<p* ga teng bo'ladi. Shuning uchun ikki vektor orasidagi

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \qquad (13.5)$$

burchakni topish formulasiga binoan formulaga ega bo'lamiz. Bu ikki **to'g'ri chiziq orasidagi burchakni topish formulasi.** Agar ikki to'g'ri chiziq orasidagi o'tkir burchakni topish talab etilsa (13.5) tengiikning o'ng tomonidagi ifodani absolyut qiymatini olish kerak.

- .. x 2 y -1 z - 3 x -1 y+ 2 z +1

3-misoi. ------- ---- -— = ------- *va* ---------- = ----- = ----

3-12 2 4-2

to'g'ri chiziqlar orasidagi o'tkir burchak topilsin.

Yechish. (13.5) formulaga *mp*=- 3, *n*\= -1, *p*\= 2; w_2= 2, «$_2$= **4,** p_2= -2 qiymatlarni qo'ysak:

cos = 3-2 + (-l)-4 + 2(-2) / j3²+(-l)² + 2- ч/2Г+4?+(-2)² = -2 / V14V24 = -2 / V2-7J-8 — COS^> _ 1 / 2V21

kelib chiqadi. Shartga binoan ikki to'g'ri chiziq orasidagi o'tkir burchak bizni qiziqtirganligi uchun oxirgi tengiikning o'ng tomonidagi ifodani absolyut Q'ymatini olamiz: cos«9=..................... 4==0 1091

2V2.I

lopam' ^r*^onomelr'k funksiyalarning qiymatlari jadvalidan <p = 88''44 ekanini vektori,**'Paralclil'k sharti.** Ikki to'g'ri chiziq faqatgina ularning yo'naltiruvchi Parallellik sh^t'd "Komneai 1 bo'lgandagina parallel bo'lgani uchun vektorlarning

~ — L (B·6)

fori11ulaga ega b o'l - 7' Л /л

Ianuz. Bu to g ri chiziqlarning parallellik shartidir.

nuqtadan —— 3 = _* 1 to'g'ri chiziqqa parallel

"gan to'p'r; „L-. 13 2

vechish? , пц 4 tenSjamasi topilsin.

Я adan o tuvchi to g ri chiziq tenglamasini yozamiz:

Л- * 1 y 4-1 Z-2
m n p

Shartga ko'ra bu to'g'ri chiziq berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bo'l uchun *m, n, p* sonlar 1, 3, 2 sonlarga proporsional bo'ladi. *tn, n, p* sonlami proporsional sonlar bilan almashtirib

x-l_y+3_z-2
l 3 2

tenglamani hosil qilamiz.

5-misol. /1(1; 2; 3) nuqtadan

|2x + 3^ + 5z-9 = 0,
|3x-4y + z-l2 = 0

to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi topilsin. **Yechish,** Izlanavotgan tenglamani kanonik ko'rinishda yozamiz

(a)

111 11 p

To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida = 2/ + 3/ + *fk* va ,V,= *3i-4j + k* normal vektorlarning vektor ko'paytmasi ni olamiz. I holda

2 3
3-4

yoki determinate birinchi satr elementlari bo'yicha yoysak 3 5 |-
-4 1

2 5 k
3 1 j

kelib chiqadi. Demak /77=23, /7=13, p=-17. Ushbu qiymatlarni to'g'ri chiziq tenglamasi (a) ga qo'ysak.

x-1 *y-2* _ z-3
23 ~ 13 ~ -17

hosil bo'ladi.

2. Perpendikulyarlik sharti. Ikki to'g'ri chiziq faqatgina uarnrt. yo'naltiruvchi vektorlari o'zaro perpendikulyar bo'lgandagina perpen i bo'ladi. Shuning uchun ikki vektorning perpendikulyarlik shartiga binoan

W7| /77т +/7] /7; = 0 (13.7) I

lormuiaga ega bo'lami. Bu ikki io'g и chiziqning pcipcndikulyailikst'

6-misol. x -1 *y + 3* ~-2 / 3 - 2 - 4 va x - 3 _ *y* + 4 _ г-6 / 2 -5 " 4

to'g'ri chiziqlar perpendikulyarmi?

• I

Yechish. (13.7) tenglamaga ni| = 3, n; qiymatlarni qo'ysak 3-2 r(-2)(-5) + (-4)-4 = - -S f- chiziqlarning perpendikulyarlik sharti I " p 4; ni; 2, I 2 perpendikulyar.

i iik rhiqadi-
= 6 + 10-16 = 0 kelib ch o,zero

bajarilganligi uchun

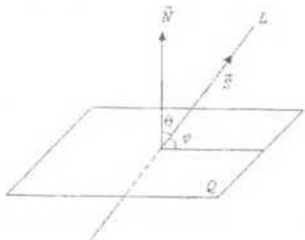
J3 6- To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak. To'g'ri chiziq bilan tekislikning parallellik va perpendikulyarlik shartlari

To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak deganda to'g'ri chiziq bilan uning shu tekislikdagi proeksiyasi orasidagi burchaklardan biri tushuniladi.

~ To'g'ri chiziqning tekislikdagi proeksiyasi-shu to'g'ri chiziq orqali berilgan tekislikka perpendikulyar qilib o'tkazilgan tekislikni berilgan tekislik bilan kesishish chizig'idir. *L* to'g'ri chiziq

$$\frac{x-A_1}{l} - \frac{y-y_1}{m} - \frac{}{n} \quad P$$

kanonik tenglamalari, *0* tekislik $Ax+By+Cz$ + Z) - 0 umumiy tenglamasi bilan berilganda ular orasidagi <*p* burchakni topamiz. To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori *S-nii + nj + pk* va tekislikning normal vektori /V = *Ai* 4 *Bj* + (~*k* 67-chizmada ko'rsatilgandek joylashgan deb ular orasidagi burchakni *0* orqali belgilaymiz. U holda ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasiga ko'ra



67-chizma

cosfl = T-—-Γ-— bo'ladi. к I-к i

olsak sin <*p* - —J?—Л .. $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ va $\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$ ekanligini hisobga

Ammo *в* <*p* - " .

kelib chiqadi. Bu yerdagi *SN* skalyar ko'paytmani va

vektorlarning uzunliklari !$ j, |.V | ni ularning koordinatalari orqali ifodalasak

Sin *cp* = . (] *Am* 4- *Bn* ~*Cp*3.8)

+ *B'* + *C'* ■ *yjm'* + n^2 4- p^2

to°mond°!adf' 0S^-;r ekanIiS'ni e'tiborga olib (13.8) tenglikning o'ng 1 agi ifodaning absolyut qiymatini olamiz. Shunday qilib

i *Am* + *Bn* + *Cp* j

sm <9 - - ■s—.-J...,----_—rJ________(1 3 9)

to'g'rj *A*- + *в*! +c^2 *yjm* + n^2 + p^2

A'laini?qilamiz. UZ,4 b,lan tekislik orasidagi burchakni topish formulasini hosil

7~ misol. P' -J'-l = 0.

t0'3nr.k- • l3v+2z-4 = 0

s ri chiziq bilan 2

, Vechish. IHM _V + 2~6 = o tekislik orasidagi <*p* burchakning sinusi topilsin. an°nik ko'rinish '

, Ormuladan foydalanish uchun to'g'ri chiziq tenglamasini

s KUtiramiz. Buning uchun sistemaning har bir tenglamasidan д-ni topamiz. Birinchi tenglamadan 3x = y + 1, ikkinchidan 3x = 2(z - 2); x = ^{2}-(^ = ~2 kelib chiqadi. Bularni tenglashtirsak

x - 0 y +1 _ z - 2

2

to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi hosil bo'ladi. (13.9)

_ 3

m ~ \,n = 3, p = ~>A -2,B - \,C = 1 qiymatlarni qo'ysak

sin^ =

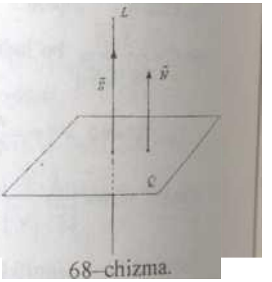
hosil bo'ladi.

1.To'g'ri chiziq bilan tekislikning perpendikulyarlik sharti. To'g'ri chi tekislikka faqatgina uning yo'naltiruvchi 5 = *{m.n, p]* vektori tekislikning

N - {A, B,C} normal vektoriga parallel bo'lgandagina perpendikulyar bo'ladi (68 - chizma). Ikki vektorning parallcllik shartidan

- = - = - (13.10) *m n p*

tenglikka ega bo'lamiz. (13.10) to'g'ri chiziq bilan tekislikning **perpendikulyarlik** sharti.



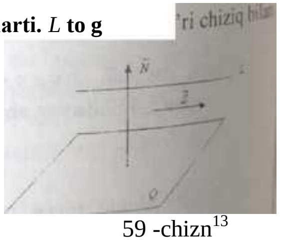
68–chizma.

2.To'g'ri chiziq bilan tekislikning parallellik sharti. ***L*** **to g** 'ri chiziq bilan

tekislik *S - {m,n, p}* va *N =* (j, *B,C}* vektorlar perpendikulyar bo'lgandagina parallel bo'ladi(69-chizma). Shuning uchun ikki vektorning perpendikulyarlik shartiga asosan

Am + Bn + Cp = 0 (13.11)

tenglikka ega bo'lamiz (13.11) to'g'ri chiziq bilan tekislikning **parallellik** sharti.



59 -chizn13

= 0 teM>,

x-4r +

8-misol. .1(2; 1;6;) nuqtadan o'tuvchi va perpendikulyar to'g'ri chiziqning tenglamasi yoziisin. tensil3niasiga

Vechish. Berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g ri chiziq izlanayotgan tenglama

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y-1}{n} = \frac{z-6}{p}$$

, inishea ega bo'ladi (13.Ю) ga ko'ra *m, n, p* sonlar tekislik tenglamasidagi ko J ^.4, C 5 sonlarga proporsional. To'g'ri chiziq tenglamasiga*ni, n, p* o'rniga ravishda 1, -4, 5 qiymatlarni qo'yib to'g'ri chiziq tenglamasi

m ЩГ-1Г-6

ni hosil qilamiz.

1 -4 5

13.7. To'g'ri chizjq bilan tekislikning kesishish nuqtasi

= —(13.12) to'g'ri chiziq bilan $Ax + By+Cz+ D = 0$ (13.13) *nt* [11] tekislikning kesishish nuqtasini topish talab etilsin.

To'g'ri chiziq tenglamasini parametrik ko'rinishda yozamiz:

x = x, + /И/, ■y = y, + и/, (13.14)

/ = z, + *pt.*

t parametrning har bir qiymatiga to'g'ri chiziqning aniq nuqtasi mos keladi. t ning shunday qiymatini tanlashimiz kerakki uning bu qiymatiga mos to'g'ri chiziq nuqtasi tekislikda yotsin. (13.14) tengliklardagi x, *y,* r laming qiymatlarini (13.13) tekislik tenglamasigaqo'yib t ningqiymatini aniqlaymiz:

Л(л-1 + *mt)* + S(y, + *m)* +q(Zi + pl)+D = 0 yo^j

(4m + *Bn* + *Cp)i* = -(/lx, + By, +Cz, f D) = 0 (13.15)

Agar to g ri chiziq tekislikka parallel bo'lmasa *Am* + *Bn+Cp*0* bo'ladi va (13.15) dan t ni topsak

Am + Bn + Cp

hosil bo ladi. t ning ushby topilgan qiymatini to'g'ri chiziqning parametrik tengamalari (13.14) ga qo'ysa^ to'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtastning koordinatalari ho$j| bo'ladi

. ч • C/7=;0 bo Igan holni o'rganamiz. a) /l.v,+Bp,+Cz, + D * 0

LZ- 'g7 ChiZiqninS nuqtasi 4x+By+Q + D=0 tekislikda

qanoatlant?rmavdi aladlı(LhUnki M nu 4tanin S koordinatlari tekislik tenglamasini Parallellik

sharti ekanini ^? Cı? = o ChıZıq ЬИaıı tekisUkning

Parallel bo'ladi ' ls o hga olsak qaralayotgan holda to'g'ri chiziq tekislikka

b) -4.V, + By. + Cz +/')- i •! •

nil qtasinino i j-' bo Ism. Bu holda to'g'ri chiziqning Л-/ (v ■ r,:z, >

n koordinatalar. , ~

qanoa tlantirgani uchun л/ WCriTM tekislik tenglamasini ko ›ra *Am + Bn-t Cp = o* b< 'qta te kislikda yotadi. Ikkinchi tomonidan shartga ladi. Bu tenglik *t* nin< UC^Un 03.15) tenglama ()•/ = 0 ko'rinishga ega a nuqtalari,jumja(ja^' '^a'San qiymatida bajariladi, ya'ni to'g'ri chiziqning hunday qilib bir va^.g ri c‹››z*qning o'zi ham tekislikda yotadi.

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, [/x, \\ + By\backslash + Cz, + D - 0 \end{cases} \qquad (13.17)$$

teng'liklaming bajarilishi ——^ = ——21 = -—it to’g’ri chiziqning
m n p

$Ax + By + Cz + D\text{-}Q$ tekislikda yotish sharti bo’lib xizmat qiladi.

9-misol. = to’g’ri chiziq bilan **3v-4,.** л V-z+5 = 0
5 4-1

tekislikning kesishish nuqtasi topilsin.

Yechish. To’g’ri chiziq tenglamasini parametrik ko’rinishda yozamiz-
x -1 _ y + 2 z -1

x = 5/ +1, Bundan x -1 - 5/,_v + 2 - 4/,z-1 --/ yoki <v = 4/-2,

|z = -/ +1

to’g’ri chiziqning parametrik tenglamalari kelib chiqadi. *x, y va z* ning qiymatla * ni tekislik tenglamasiga qo’ysak 3-(5/ + 1)-4(4/-2)-(-/ + 1) + 5 = 0 y_0^ 15/+3-16/ + 8 + /-1+ 5 = 0; 0/ + l5 = 0ra ega bo’lamiz. O-/ + I5 = o tenglamani qanoatlantiruvchi *t* ning qiymati mavjud emas. Boshqacha aytganda to’g’ri chiziq bilan tekislik kesishmaydi, ya‘ni ular parallel.

10-misol. to’g’ri chiziq bilan 2x+3y-2z+2 = 0

tekislikning kesishish nuqtasi topilsin.

Yechish. To’g’ri chiziq tenglamasini parametrik ko’rinishda yozamiz:
£21 = ,; x_i,2z> д, + 1 = 3,. 2-5=2/;
2 3 2

lx = 2/ -r 1, b’ = 3/-l, lz = 2/+ 5.

x, y, z ning ushbu qiymatlarini tekislik tenglamasiga qo’yib t ni aniqlaymiz. 2(2/ + 1) + 3(3/ 1) - 2(2/ + 5) + 2 = 0;4/ + 2+9/- 3-4/-10 + 2 = 0:9/ -9 = 0:/ = I- To’g’ri chiziqning parametrik tenglamalariga / = 1 qiymatni 4^0V^{sa} x = 2-1-t 1 =3. v = 3-1 -1 = 2,z = 2 1 + 5 = 7 kelib chiqadi. Demak berilgan te isi bilan to’g’ri chiziq 4-/(3: 2; 7) nuqtada kesishar ekan.

13.8. Tekisliklar dastasi tcki>lik!;11

Berilgan *L* to’g’ri chiziq orqali o’tuvchi tekisliklar to planii e dastasi deb ataladi. / to’g’ri chiziq esa dastaning o’qi deyiladi.

l-ara/ qilaylik dastaning o’qi umumi;. tenglamalari

$$\begin{cases} A\text{^}x + By + C|Z + D_t — 0, \\ Л,x + By + C_2z + £), = 0 \end{cases} \qquad (13.18)$$

yordamida berilgan bo’lsin.

Bu sistemaning ikkinchi tenglamasini o’zgarmas *A* songa ko’paytirib birinchi tenglamasiga hadma-had qo’shsak

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) - 0 \quad (13.19)$$

<,|ik hosil bo’ladi. (13.19) tenglama *x, y* va *z* ga nisbatan birinchi darajali ho’Panligi uchun u *A* ning har qanday sonli qiymatida tekislik tenglamasini ifodalaydi. (13.19) tenglama (13.18) tenglamaning natijasi ekanligini e‘tiborga olsak (13-18) tenglamani koordinatalari qanoatlantiruvchi barcha nuqtalarning koordinatalari (13.19) tenglamani ham qanoatlantiradi. Demak *A* ning istalgan qiymatida (13-19) tenglama (13.18) to’g’ri chiziqdan o’tuvchi tekislik tenglamasini ifodalaydi.

Endi teskarisini, ya‘ni o’qi (13.18) to’g’ri chiziqdan iborat tekisliklar dastaning Л,x+5,y + C_2z +O_2 =0 tekisligidan boshqa har qanday tekisligi tenolamasini (13.19) tenglamadan hosil qilish mumkinligini ko’rsatamiz. Haqiqatan, dastaning istalgan tekisligi uning o’qda yotmagan bitta A/,(x,;y^z.) nuqtasi bilan to’liq aniqlanadi, chunki to’g’ri chiziq va unda yotmagan nuqta orqali faqat birgina tekislik o'tkazish mumkin. Bu tekislik tenglamasini topish uchun (13 19) tenglamaga nuqtaning koordinatalarini qo’yamiz

$$/(л", + B_ty_} + C|Z| + D, + A(A_2x_t + B_2y_t + C_2г, + £),) = 0. \quad (13.20)$$

Bu tenglamadan $A_2x_{\{}+B_2y_{\}}+C_2z_t +D_2\wedge0$, ya‘ni nuqta (13.18) sistemaning ikkinchi tenglamasini qanoatlantirmaydi, ya‘ni u $A_1x+ B_1y+C_2z + D_2 = 0$ tekislikda yotmaydi deb faraz qilib *A* ni topamiz. *A* ning topilgan qiymatini (13.19) ga qo’yib dastaning M^xp^y^z,) nuqtadan o’tuvchi tekisligi tenglamasini aniqlaymiz. Agar *M^x.;* y/.zj nuqta (13.18) dagi ikkinchi tekislikda yotsa $Л_2X$; + 5,.^ + C_2z, + = 0 bo’lib (13.20) tenglamadan

topishning iloji bo’lmaydi (tenglamada *A* ishtirok etmaydi). Demak (13.19) dastaning $A_2x + B_2y + C_1z + D_2 \sim 0$ tekisligidan boshqa barcha tekisligi tenglamasini (13.19) tenglikdan hosil qilish mumkin ekan. (13.19) tenglama **tekisliklar dastasining tenglamasi** deb ataladi. Shunday qilib (13.18) to’g’ri chiziqdan o’tuvchi tekisliklar dastasi tenglamasi (13.19) kabi topilar ekan.

U-misol. -[1 J] to’g’ri chiziqdan o’tuvchi to’g’ri chiziqlar
(x-_y + 2z--l = 0 bi
dastasidan Л/(1; -1; 2) nuqtadan o’tuvchi tekislik ajratilsin.

Yechish. Berilgan to’g’ri chiziqdan o’tuvchi tekisliklar dastasining «iglamasi (13.19) ga binoan 3x + y - 4z + 5 + Дx - y + 2z -1) = 0 (b)

И nmshga ega bo ladi. (b) tenglamaga Л/ nuqtaning koordinatlarini qo’yib *A* ni ■jqlaynuz

31 + (_1)_4 24-j + /;(l (1,1-2 2-l)-0,--l-t-5/U0,52-U--.

5

i n mg ushbu topilgan qiymatini (b) ga qo’ysak

" " 3 ~ 4z y S 4. J. *t* ->
5— J) (); 15 v l- 5 j ■ 20_- t- 25 + л - y + -- l - 0,

16л + 4v_]g_

tenglaniasi§a? "4 7° yokl buni 2 qisqartirsak 8.x + 2y -9; i-12 = 0 tekislik ega bo’lamiz.

12-misol. ([3x-y + z-5 = 0, [x + 2y-z + 2 = 0 (d) to’g’ri chiziq **yolizir,** 4 Orqa|i

—,- = Z 7- = ~ (c) to’g’ri chiziqqa parallel tekislik tenehtv. •
-1 2 2 &dr Oasi t

Yechish. (13.19) ga binoan (d) to’g’ri chiziq orqali dastasining tenglamasi 3x-.y + z- ' - 5+Л(л-+ 2y-e + 2) = 0 yoki o’xshash had'br? ga ixchamsalak (3 + l)x + (21-l)y+ (1-l)z-5 + 21 = 0 (f) ko’rinish tekisliklar ega bo’ladi v?' ■^iz dastasidan (e) to’g’ri chiziqqa parallelini tanlashi uchun to’g’ri chiziq kerak Shu^ bilan tekislikning paralleligi sharti

$$/Im + Bn + Cp - 0 \quad (13.11)$$

bajarilishi lozim. (f) tenglamadan l = 3+l;fi = 21-l;C = l-^ *m* ~ -l,/7 = *2,p -2* ga ega bo’lamiz. U holda (13.11) quyid^S^ -l) + (21-l)-2 + (l-l)-2-0 bo’ladi. yoki -3-Л+4, 2 o 8a 1 ega
1-3 = 0; (3 + lX-l) + (21-l)-2 + (i-l)-2 = 0 Л = 3. 21 = 0;

1 ning bu qiymatini (f) tenglamaga qo’ysak tenglamasi hosil bo’ladi.

13—mis0|. lzl = ZJ2 = | (g) to’g’ri chiziq orqali/o’tuvchi + 5y-2z + U0 teki|ik
3x-*y* + 2- - 2 = o (h) tekislikka perpendiklvar tekislik tenglamasi topilsin

Yechish. To’g’ri chiziq tenglamasini

l-v~l = >'+2 va

Voki buni soddlashtirib ^'0°' ko’rinishda yozamiz.

Bu to’g’ri chiziq orqali o’tuvchi tekisliklar dastasining tenglamasj (13.19) 1 ga ko’ra x-2y-5 + l(x-z-l) = 0, yoki o’xshash hadlarni ixchamlasak (1+ l)x-2y-lz-5-1 = 0 (i) ko’rinishga ega bo’ladi. Bu dastadan (h) tekislikka perpcndikulyarini ajratamiz. Ikki tekislikning perpendikulyar|j|< sharti j,/l, + /?,«, +c;C, = 0 (12.12) dan foydalanamiz. Biz qarayotgan hoi Uchun

A, =3.Z?.--l.C, =2:,!, = l + l.B, =-2;C, =-l bo’lgani uchun (12.12 shartdan 3(1 + 1) i-(-l)(-2) + 2 •(-!) =0 yoki 3 + 31 + 2-21=0; A .5 ga eь- bo’lamiz. 1 ning bu qiymatini (i) ga qo’ysak -4x-2y+5z-'5f5 = o yo1 I tenglikni - I ga ko’paytirsak. 4.v + 2y Sr - 0 tekislik tenglamasiga ega

14-misol ' ‘ 2’2- -.±22 = l±l = £sl parallel to’g’ri chj?iq|ar oM* ,
‘2 3 4’2 3 4
o’tuvchi tekislik tenglamasi topilsin.

\ echish. Birinchi to’g’ri chiziq tenglamasini

x - I _ *y* - 3
2 ” shaklda yoki buni soddalashtirib
x -1 z
2 ~ 4

>0Zam'Bu to’g’ri chiziq orqali o’tuvchi tekisliklar dastasining

2) = 0 yoki o’xshash hadlarni ixchamlasak

3x-2y + j4 ф ko’rinishga ega bo’ladi. Shu dastadan

(3+2^"2v , . orqali o’tuvchisini ajratamiz. Ikkinchi to’g’ri chiziq

ikkinchi tog M(-2;-l;I) nuqtadan o’tishi ko’rinib turibdi. Demak

tenglamasıdan . orqaii o’tuvchi tekislik ham shu nuqta orqali o’tadi va M

ikkinchi to g k^ordjnata|ari tekislik tenglamasi (j) ni qanoatlantiradi.

пифar1*п§ (j) ga м nuqtaning koordinatalarini qo’yib 2 ni aniqlaymiz:

■ ' (_2)-2-(-1)-A', + 3"2;1 = 0;"6-4^ + 2-2 + 3-2л-0;-7Л-1 = 0;Я = -y.

j ninetopilgpn qiymatini (j) tenglamaga qo’yamiz:

$$\frac{19}{7} \sim 2y + ...z + 3 + \frac{2}{7} = 0.$$

HP’ H) ko’paytirsak 19x-14j> + z + 23 = 0 izlanayotgan

Bu tenglamani 7 ga tenglama hosil bo ladi.

15-misol. to’g’ri chiziqning 5x + 2y + 2z-7 = 0

tekislikdagi proeksiyasi topilsin.

Yechish. Biz berilgan to’g’ri chiziq orqali o’tuvchi va berilgan tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasini topishimiz kerak. U holda proeksiya topilgan tekislik bilan berilgan tekislikning kesishish chizigidan iborat bo’ladi. Berilgan to’g’ri chiziqdan o’tuvchi tekisliklar dastasi tenglamasi

3x-2y-r + 4 + 2(x-4y-3z-2) = 0 (k)

kabi aniqlanadi. Izlanayotgan tenglama (k) tenglamadan A ning qandaydir aniq qiymatida kelib chiqadi? (k) tenglamani o’xshash hadlarini ixchamlab uni (3+A)x + (-2-4A)y + (-l-3A)z + (4-2A) = 0 (1) ko’rinishida yozamiz. Izlayotgan tekislik berilgan tekislikka perpendikulyar. Ikki tekislikning perpendikulyarlik sharti + =0 ga Л,=5, B|=2, C,=2; $Л_2$=3+л, &--2-4Л ,C_2=-l-32

qiymatlarni qo’ysak

5(3 + A)+ 2(- 2 - 42) + 2(-1 - 32) 0;l 5 + 52 - 4 - 82 -2 + 62 -- 0;-92 + 9 = 0; 2 = 1

elib chiqadi. 2 ning topilgan qiymatini (I) ga qo’ysak berilgan to’g’ri chiziq orqali o tuvchi va berilgan tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasi hosil

■ adi. 4x-6j'-4z + 2 = 0 yoki 2 ga qisqartirsak: 2x-3y-2r + 1 = 0.

Shunday qilib berilgan to’g’ri chiziqning berilgan tekislikka P'oebyasmi ifodolovchi to’g’ri chiziq tenglamasi

| 2.v - 3p - 2z + 1 = 0,

k0>-nishga ega bo’lar ekan.

I ? . Mnstaqil yechish uchun mashqlar va test savollai i to’g’rj . l1lKltadan o’tuvchi

va 5 = (з;-2,4) yo’naltiruvchi vektorga ega

Kg ' >ng kanonik tenglamalari yozilsin. Javob: -—- =1

3 ,2 +1 4

, 2‹ M (2; -2 : n

to S’ri chizjQ • nuqtadan o tuvchi va S = {5:4;—2} yo’naltiruvchi vektorga ega

S parametrik tenglamalari yozilsin.

(5x + 2y + 2r-7 = 0

Javob: x = 5/ + 2,y = 4/-2,z = -2r + l.

3- = = t0›S›ri chizkl”'ng koordinata o’qlari bilan tashkil

o’tkir burchaklari topilsin.

Javob: cosor = -|,cos/? = -,cosy = y.a = 73’24';/? ~64°37';cosy = ЗГГ.

4. To’g’ri chiziqning umumiy tenglamalari 4->' + 5-–1 = 0,
|2x + 3y + z + 9 = 0 kanonik

ko’rinishsa keltirilsin. Javob: ^— = 22t_ = £z_2
-19 9 11 ’

5- RX n = *0* ,0›S›ri Ch,Ziq,li o,,› tCkiSllkka P^yl’vchi tekis|ik
tenglamasi topilsin. Javob: 2_v- 11 y — 17 — 0.

5x + 3 y -45 + 8-0,
x-y+z+5=0

chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasi) topilsin. Javob:

Ko’rsatma. Sistemadan *z* ni yo’qotish lozim.

to’g’ri chiziqning Oxy koordinata tekisligidagi izi (to’g’ri

I S 8)

Ko’rsatma. Sistemaga r=0 qiymatni qo’yib uni yechish kerak.

7. (r2x + 3y-4z + 5 = 0, |x - y + z = л0 va (lx- y + 2z -4 = 0, |2x + y - z -5 = 0 to’g’ri chiziqlar orasidagi o’tkir
burchak topilsin. Javob: cos<*p* -- 0.9445; <p = 19"H'.

8. .4(2; -1; 3) nuqtadan - ZT.2 _ to’g’ri chiziqqa parallel

o’tkazilgan to’g’ri chiziq tenglamasi topilsin. Javob:

9.

yoziisin. Javob:=

1 o A,~* - y + 2 - — 2 1 2 ... 2 to’g’ri ... 0 tekislik orasidagi

o’tkir burchak topilsin. Javob:

11. P (1; 2; -1) nuqtadan o’tuvchi va

‘f

kesis»6"

14. $M(2;\ -1;\ 0)$ nuqtadan va $\begin{cases} x-y+3z-1=0, \\ 2x+y-z+2=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekislik tenglamasi topilsin. Javob: $x-7y+17z-9=0$.

15. $\begin{cases} 3x+2y+3z-5=0, \\ x+y+z-4=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va $\begin{cases} x-y+2z+1=0, \\ 2x+y-3z+2=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqqa parallel tekislik tenglamasi topilsin. Javob: $7x-4y+7z+49=0$.

16. ix-2y + jr 1 to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va 2x + 2y-z + 5 = 0 tekislikka
$x-y+z+5=0$
perpendikulyar tekislik tenglamasi topilsin. Javob: $4x-3y+2z+26=0$.

^x+2_Zsl=:£ va = —- = parallel to'g'ri chiziqlar orqali

o'tuvchi tekislik tenglamasi topilsin. Javob: 4x + 13y-z-5 = 0.

18 To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori nima?

A) *To'g'ri chiziqqa parallel istalgan vektor
B) Fazodagi istalgan vektor
D) To'g'ri chiziqqa perpendikulyar vektor
E) To'g'ri chiziq bilan 45" burchak tashkil etuvehi vektor
F) To'g'ri chiziqda yotuvehi birlik vektor.

19. p(l;l;l) nuqtadan — = ~~ = ~~ to'g'ri chiziqqaeha masofa topilsin.

A) J101 B) \To2 D) 10 E) 11 F) 20.

Ko'rsatma. P nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar *a* tekislik o'tkazilib uning to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasi Q topiladi. P bilan Q orasidagi masofa izlanayotgan masofa bo'ladi.

20. Agar Л<,(A-,.;У$_0$:Г,.) nuqtadan chiqib *a{m,n,p]* vektor yo'nalishida v = *yjm*^{2} +*n*: + *p*^{2} tezlik bilan to'g'ri chiziqli tekis harakatlanayotgan A/(x;y;z) nuqtaning harakati tenglamasi ekani ma lum bo'lsa. AY$_O$(1,1;1) nuqtadan chiqib ^{2.3.6} vektor yo'nalishida v = 28 eziik bilan to'g'ri chiziqli tekis harakatlanayotgan A/(x;y;c) nuqtaning harakatiЛ = Л'$_0$ + *mt*, t'-^{n}glamasi topilsin.
I r? V = 1 + 7, y = 1 + 3'>- 1 +6/ B) .r =У = y„ + *nt*, Л1 + 4/,y = 1 + 6/, z = I +12/ to'g'ri chiziq 3.v -/y + 2-- 5 - 0 tekislikga m va= + *Pt* n ning

) A- = 1 + 6/J, = I + 9, , | +)8/ E) x = 1 + 8/,y = I + 12/,z = I + 24/
) ^{п} = I i-10/.y] + 15/ - = | b -o,
21. У-3 .- + 1 ......
$\frac{}{m} = \frac{}{5} = \frac{}{6}$
qanday qiymatida parallel bo'ladi.

A) 3; 4 B) 2; 1 D) 8; $\frac{5}{3}$ E) 7; -2 F) 9; $\frac{5}{3}$.

22. $mx+7y+8z-2=0$ tekislik m ning

-—- = *Y—l* = to’g’ri chiziq hamda *m* 5 4

qanday qiymatida parallel bo’ladi.

A) 1 B) 2 D) 3 E) -2 F) hech bir qiymatida.

23. 3л* •+• y — - + 11 = 0 va 2x + 2>’ + *z* — 3 ~ O tekisliklar orasidagi burchakning

kosinusi topilsin.

A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{7}{3\sqrt{11}}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ F) $\frac{7}{4\sqrt{11}}$.

O’z - o’zini tekshirish uchun savollar

1. To’g’ri chiziqning yo’naltiruvchi vektori nima?
2. To’g’ri chiziqning kanonik. parametrik va umumiy tenglainalarini yozi
3. To’g’ri chiziqning parametrik va umumiy tenglamalari qanday ailih kanonik tenglamalariga keltiriladi?
4. To’g’ri chiziqning kanonik tenglamalari qanday qilib unine tenglamalariga keltiriladi?
5. Ikki nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasini yozing.
6. Ikki to’g’ri chiziq orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
7. To’g’ri chiziqlarning parallellik va pcrpcndikulyarlik shartlarini ayting.
8. To’g’ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
9. To’g’ri chiziq bilan tckislikning parallellik va perpendikulyarlik shartlarini yozing.
10. To’g’ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasi qanday topiladi?

11 .To’g’ri chiziqning tekislikda yotish shartini yozing.

12.Tekisliklar dastasi nima? Uning tenglamasi qanaqa?

14- Ma4ruza. Mavzu: Ikkinchi tartibli sirtlar

Reja:

I. Ikkinchi tartibli sirt va uning umumiy tenglamasi.

2. Silindrik sirtlar.
3. Aylanish sirtlari.
4. Konussimon sirtlar.
5. Sfera.

6 Ellipsoid.

7. Bir pallali giperboloid.
8. Ikki pallali giperboloid.

0. Elliptik paraboloid.

10. Giperboiik paraboloid.

Adabiyotlar: 3,5,6,7.8.10,1 1,14.15,16. a\ lanish

I'ayanch iboralar: sirt. yasovchi, Уопа∧'гиУС ISOidning uC∧3f konussimon sirt. sfera, markaz, radius, ellipsoid, yarim o q,e ■ ; giperboloid. paraboloid.

14.1.Ikkinchi tartibli sirt va uning umumiy tenglamasi

Dekart koordinatalari *x*, y va *z* ra nisbatan ikkinchi darajali algebraik

teng[am] *Ax~+By~+Cy~+Dxy+Exz+Fyz+ax+by+cz+d.=§* (14.1)

T aniqlanadigan sirt **ikkinchi tartibli sirt** deb ataladi.

b* [3] Bu vcrda *A,B,C,D,E,F, a, b, c, d* koeffitsientlar ma‘lum sonlar bo’lib „ P//f’sonlardan kamida bittasi noldan farqli. Aks holda (14.1) tenglama ’,v+c_+^o ko’rinishdagi tekislik tenglamasiga aylanadi.

oX' (14 1) tenglama ikkinchi tartibli **sirtning umumiy tenglamasi deb** ataladi koeffitsientlarning qiymatlariga bog’liq ravishda turli sirtlarni aniqlaydi.

[73] Izoh. (14-1) ko’rinishdagi har qanday tenglama ham qandaydir sirtni ifodalaydi deb o’ylash noto’g’ri.

14.2. Silindrik sirtlar

Berilgan egri chiziqni kcsuvchi to’g’ri chiziqning bu egri chiziq bo’ylab va berilgan yo’nalish(o’zi)ga parallel harakatidan hosil bo’lgan sirt **silindrik (silindrsimon) sirt** deb ataladi. Bunda egri siziq bilan uni kesuvchi to’g’ri chiziq bir tekislikda yotmaydi deb faraz qilinadi.

Harakatlanuvchi to’g’ri chiziq silindrik sirtning **yasovchisi,** berilgan egri chiziq uning **yo’naltiruvchisi** deb ataladi (70 - chizma).

Biz kelgusida yo’naltiruvchisi koordinata tekislikiaridan birida yotgan va yasovchisi shu tekislikka perpendikulyar o’qqa parallel silindrik sirtlarni qaraymiz.

Олу koordinata tekisligida yotgan F(x,y)=0 tenglamaga ega *L* egri chiziqni qaraymiz. Yasovchisi Oz o’qqa parallel va yo’naltiruvchisi shu *L* egri chiziqdan

iborat silindrik sirtni yasaymiz (70-chizma).

Egri chiziqning Олу tekislikdagi tenglamasi Г(л,у)=0 Олуз fazoda shu sirtning ham tenglamasi ekanligini ko’rsatamiz. Л7(л;у;с) yasalgan silindrik sirtning aniq nuqtasi bo’lsin.

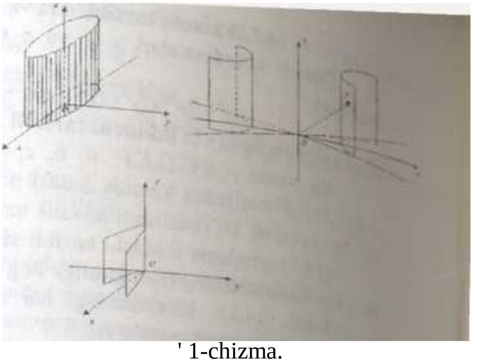
A'/Cv.y.z) nuqtadan o’tuvchi va yasovchi bilan *L* yo’naltiruvchining x.y.-) kesishish nuqtasini W orqali belgilasak, u /У(л;у;0) kooi-dinatalarga ega bo’ladi. *N* nuqta *L* ■ §Г1 ch'Z'qda yetganligi uchun uning .v.y fh\a=n taidl‹ egi‹ Ch‹Z‹4 koordinM i n, i qanOatlantiradL Demak bu talari ham qanoatlantiradi, chunki koordinatalar?/.(v'1'l b).0 ^sa,y›an S11,ndnk —-ъ .... o- .... &

70-chizma

nu4taninc ^0 л- U tenglamani qanoatlantiradi. Sirtda yotmagan birorta tenglamani Л/(л;у,з) nuqtaning ham nuqtalarni o ,'n v ata!ar' bu tenglamani tcnglamada z qatnashmaydi. qanoatlantirmaydi, chunki bunday ye is sirtning istalgan Л/ nuqtasining igidagi proeksiyalari *L* egri chiziqda yotmaydi.

Demak $F\backslash x,y)=O$ tenglamaga ega yo'naitiruvchiga va Oz o'qqa parallel yasovchiga ega silindrik sirtning ham tenglamasi $F(x,y)$-Q bo'lar ekan.

Shunga o'xshash y qatnashmagan $F\backslash x,z)\sim 0$ va x qatnashmagan $F(y,z)=Q$ tenglamalar $Oxyz$ fazoda yasovchisi Oy va Ox o'qlarga parallel silindrik sirtlarini tenglamalarini ifodalaydi.



' 1-chizma.

$/lx$ By C 0 tenglama Oxy tekislikda qaralsa u to'g'ri hi • ekanini bilamiz. Ana shu tenglama $Oxyz$ fazoda qaralsa Ch,Z,4 tenglanias zlx + Bv + C 0 to'g'ri chiziq bo'ylab kesib o'tuvchi va 0- A'™/ ○*V TEI(ISIL*' tenglamasini ifodalaydi.
○ 4qa paral| « ■

Shunga o'xshash Oxy tckis!igidagi $x^2+y^2=a^2$ aylana ^- = 1 a'' ellips, x' ^- = 1 giperbola va y=2px parabola tenglamalarini $Oxyz$ fazoda a^2 qarasak Oxy tekislikni shu chiziqlar bo'ylab kesib o'tuvchi va yasovchisi Oz o'qqa paraile doiraviy, elliptik, giperbolik va parabolik silindr deb ataluvchi sirtlami ifodalayd (71 chizma).

14.3. Aylanish sirtlari

Fazoda to'g'ri chiziq, shu to'g'ri chiziq bo'ylab kesishuvchi ikk:u tekisliklarni tenglamalari bilan berilishini ko'rdik. Shuningdek fazodagi eg- chiziqni ham shu egri chiziq bo'ylab kesishadigan ikkita sirtlarning tenglamak yordamida aniqlash mumkin. Masalan z-3 tekislik bilan x+y+г'3 kcsishishi natijasida iiosil bo'luvchi aylanani tenglamasi

. LI

[x- 4- y- + z' = 25

sistcma yordamida berilishi mumkin. _ iy lik bilan x^{2*1}

Ikkinchi tomondan shu aylaning tenglamasini z= tc |S iioiiavi\ siii idrnine kesishish chizig i deb

f^2 = \

]x" + J' = k-'

ko'rinishida \o/isli ham nuinikin. Aylananing bu .кк'", д g_a tengb°* holda aylananing maikazi 0|(0;0:3) nuqtada bo i aylana z=3 tekislikda yotadi. , , nish^a kirisharn^

Endi aylanish sirti deb ataluvchi sirtlarni o rga Oyz tekislikda yotuvchi £ egri chiziq

fX = O, (14.2)
lf(/,2) = 0

vordami^ benlgan^ a ay)anishi natijasida host! bo Igan sirtm ieng>an13 У ecri chiziq"» 1

... deb ataladi. Uning tenglamasini topamiz. *M(x,y,z)* m,Z \irt aylanish sirti qaray00 lanish sirtininS-. uning Or o'q bilan kesishish nuqtasi bo'lsin. Л/ nuqtadan Or o'qqa nuqtasini A', A chiziq ulJrr tekislik O tkaz п be|gi|aymjz. *KM va KN* kesmalar bitta •shish "и^'^anH§1 uchun ular teng, ya'ni *KM=KN* (72-<hizma).

ine koordinatalarini sirtning nuqtalarini koordinatalari *x,y,z*

,£ egri сь^дaДЧy.2Г|ar'orqali belgiladik.

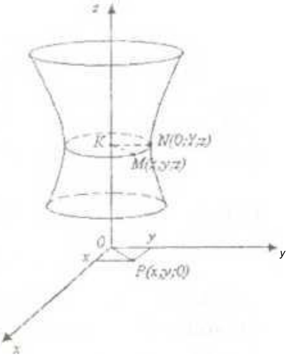
^rdanfarqlashmaq ke manjng uzunligi m○nuqtaning ordinatasi Г ning

ПР- iv+y² Shunday qihb

^ = T?77yoki y = + • Bundan

tashqari A nuqtaning applikatasi Z. Л/ nuqtaning appilikatasi r ga teng, chunki ular Oxytekislikka parallel tekislikda yotadi.

K(0;Y;Z) nuqta *L* egri chiziqda \otganligi uchun uning *Y, Z* koordinatalari egri chiziq tenglamasi *F(Y;Z)-0* ni qanoatlantiradi.Bu tengiamaga У = ±4'.v' r/ Z~ qiymatlarni qo'yib



72-chizma.

/•\±VA-² +(14.3)

tenglamani hosil qilamiz. Shunday qilib aylanish sirtining ixtiyoriy Л/ nuqtasini koordinatalari (14.3) tenglamani qanoatlantiradi. Sirtda yotmagan birorta Г koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatish ham

o'q at"1 ftenglama (14.2) tenglama bilan berilgan A egri chiziqni Or Boshqacha * ay*ant›r›sh natijasida hosil bo'lgan aylanish sirtining tenglamasi. chiziqni 0_a^anda tekislikdagi /'(>•. r)=0 tenglama bilan berilgan *L* egri q atrofida aylanishi natijasida hosil bo'lgan aylanish sirtining aln»ashtirih>ina○PISl1 l›ChUn egri chl/,'q tenglamasidagi *y* m ±*jx+y* ga l-misoi ' 0

mos 7 n› o'zgarishsiz qoldirish kerak ekan.

>" :"

+ — - I

сг L-

"Psnino л

x = O

aylanishi natijasida hosil bo'lgan aylanish

Yechish. Ellipsning Oz o’q atrofida aylanishidan hosil bo’lg$_a$ tenglamasini ellips tenglainasidagi y ni ± ^x^2 + / ga almashtirib , v '' ""be^B ' koor^a_{1an}- esa o’zgarishsiz qoldirib hosil qilamiz, ya‘ni x^2 + y^2 z^2 . .

a^2 a^2 c^2

___ Agar berilgan ellips tenglamasida y ni o’zgarishsiz qoldirib ±Jx^2+z^2 ga almashtirsak ellipsni Oy o’q atrofida aylanish sirtining tens! kelib chiqadi, ya‘ni

----=1 yoki
$a' c$
y + r" , | • y 2^e
•—+--- ;— = 1 yoki -7 + ^{z}$_7$ + —= 1
a~ c' c a' c

Hosil bo’lgan sirtlar **aylanish ellipsoidlari** deyiladi.

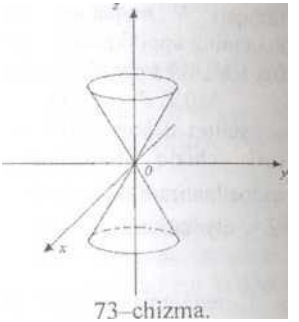
14.4. Konussimon sirtlar

Konussimon sirt deb, konusning uchi deb ataladigan berilgan nuqtadan o’tuvchi va konusning yo’naltiruvchisi deb ataladigan berilgan egri chiziqni kesuvchi barcha to’g’ri chiziqlardan tashkil topgan sirtga aytiladi. Bunda berilgan nuqta, berilgan egri chiziq tekisligida yotmaydi.

Konussimon sirtni tashkil etuvchi to’g’ri chiziqlar uning **yasovchilari** deyiladi.

Masalan, x^2+y^2-z^2-0 tenglama yordamida aniqlanadigan sirt uchi koordinatalar boshida bo’lgan ikkinchi tartibli doiraviy konusidir (73 -chizma).

Endi ikkinchi tartibli sirtlarning ba‘zi -birlari bilan tanishib chiqamiz.



73–chizma.

14.5. Sfera

Fazoning berilgan nuqtasidan barobar uzoqlikda joylashgan nuqtalarining geometrik o’rniga sfera deb ataladi. Berilgan nuqta **sferaning markazi,** undan sferagacha masofa **sferaning radiusi** deb ataladi.

Endi markazi 0i(z/;6:c) nuqtada bo’lib R radiusga ega sferaning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y,z)$ nuqta sferaning ixtiyoriy nuqtasi bo’lsin. U holda ta‘rifga binoan 0)/V/-/?.

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga ko’ra

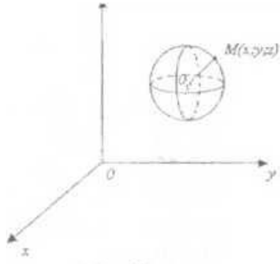
0,47 *-y/{x- uY цy-hy + (:-c)*^{2} ekanini hisobga olsak *y[(x-ay +(y-by* yoki kvadratga ko’tarsak

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = Л^2 \qquad (14.4)$$

Л bo’ladi. Shunuay ч*[1]- —........... ~ .

hos qtasining koordinatalari (14.4) tenglamani

П atlantiradi. Sferada yotmagan hech bir ^taning koordinatalari bu tenglamani "latlantirmasligini ko’rsatish qiyin emas. 4[a] (|4.4) tenglama sferaning tenglamasi. U sferaning kanonik tenglamasi deb ataladi.



74–chizma.

Sferaning markazi koordinatalar boshida bo’lganda bo’lib uning tenglamasi

xV+zW (14.5)

ko’rinishiga ega

14.6. Ellipsoid

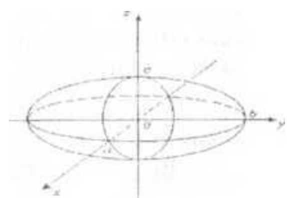
Kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}= \qquad (14.6)$$

ko’rinishda bo’lgan ikkinchi tartibli sirt ellipsoid deb ataladi. *a,b,c* musbat sonlar ellipsoidning **yarim o’qlari** deb ataladi. Ellipsoidning koordinata o’qlari bilan kesishishi nuqtalari uning **uchlari** deb ataladi. Ellipsoid oltita uchga ega.

Ellipsoid tenglamasida *x,y,z* koordinatalar juft darajalari bilan qatnashadilar. Demak ellipsoid koordinata tekisliklari *Oxy, Oxz, Oyz* ga nisbatan simmetrik.

Ellipsoidni shaklini aniqlash maqsadida uni koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesamiz.


75-chizma

Ellipsoid Oxy tekislikka parallel *z=h (*| *h* | <c) tekislik bilan kesilsa kesimda ellips hosil bo’lishini ko’rsatamiz. Buning uchun tekislik bilan ellipsoid tenglamalarini birgalikda, ya‘ni

’ = Л.

$$\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\right.$$

bo’ladi.

sistemani yechamiz. Bundan z ni yo^ptsak Oxy tekisligidagi proeksiyasi ellipsdan iborat silindrik sirt tenglamasi hosil bo'ladi.

$\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},\quad b_1=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ (14.7) belgilashlarni kiritsak oxirgi tenglamad an

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=$$

kelib chiqadi. Bu Oxy tekislikka parallel *z=h* tekislikdagi markazi 0|(0;0;Л) nuqtada va yarim o'qlari zz, va *b}* bo'lgan ellips tenglamasi. (14.7) formulalardan ko'rinib turibdiki | *h* | ortaborsa ф bilan kichraya boradi. | *h* | =c bo'lganda *aл~Ь~^* bo'lib kesim nuqtaga aylanadi. | *h* | >*c* bo'lganda *z-h* tekislik ellipsoid bilan kesishmaydi. *h*=0 bo'lganda Oxy tekislikda yotgan eng katta *a* va *b* yarim o'qlaro$_a$ ega ellips hosil bo'ladi.

Shunga o'xshash ellipsoidni Oyc tekislikka parallel x *h ( ] h* j <*a) Q$_{x:}$* tekislikka parallel y=/z (| *h* | <*b)* tekisliklar bilan kesilganda ham kesimda ellips hosil bo'lishiga ishonish mumkin.

O'tkazilgan mulohazalarga asoslanib ellipsoidning shaklini 75-chizmada tasvirlangan sirt kabi tasavvur ctamiz. Ichi bo'sh qovun ellipsoidga misol bo'ladi.

14.7. Bir pallali giperboloid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=$$

ko'rinishdagi kanonik tenglamaga ega bo'lgan ikkinchi tartibli sirt **bir pallali (kavakli) giperboloid** deb ataladi. Musbat *a,b,c* sonlar bir pallali giperboloidning **yarim o'qlari** deyiladi.

Ellipsoiddagi singari koordinata tekisliklari bir pallali giperboloidning ham simmetriya tekisliklari bo'ladi. Bir paliali giperboloidning shaklini aniqlaymiz.

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y\end{cases}$$

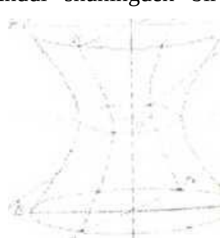
Bir pallali giperboloid Oxy tekislik (y=0 tekislik) bilan kesilsa kesimda *ABCD* gipcrbola hosil bo'ladi (76-chizma).

Shunga o'xshash uni x-0 tekislik bilan kesilsa kesimda Oys tekislikda yotgan

EFMN giperbola hosil bo'ladi (76-chizma). Xnddi shuningdek bir pallali giperboloidni Oyz va Oxs tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesilganda ham kesimda giperbola hosil bo'lishini ko'rish mumkin.

Endi bir pallali giperboloidni Oxj tekislikka parallel tekislik bilan kesib kesimni kuzatamiz.

Bir pallali giperboloidni Oxy tekislikka parallel s=/? tekislik bilan kesilsa



76-chizma

kesimda yoki <—£___ + —= i

rr(l + \) e^2(l + -,)

I *c~* *c~*

ellips hosil bo’ladi. Bu ellipsning yarim o’qlari

a = aJl + ” va b = b^l + ~, |Z?| ortganda ortadi. *h-Q* bo’lganda Oxy tekisligida yotgan va eng kichik *a.b* yarim o’qlarga ega ellips hosil bo’ladi.

Shunday qilib o’tkazilgan mulohazalar bir pallali giperboloidni Oxy tekislikdan (ikkala tomonga) cheksiz uzoqlashgan sari kengayib boradigan cheksiz quvr sifatida tasvirlash imkonini beradi. Giperboloid 76-chizmada tasvirlangan.

14.8. Ikki pallali giperboloid

4+4-4=-' <148)

a' b~ c

ko’rinishdagi kanonik tcnglamaga ega bo’lgan sirt **ikki pallali (kavakli) giperboloid** deb ataladi. Tenglamada *x,y,z* koordinatalar juft darajalari bilan ishtirok etganligi sababli koordinata tckisliklari ikki pallali giperboloidning simmetriya tekisliklari bo’ladi.

Ikki pallali giperboloidni *Qxz* va *Qyz* tekisliklar bilan kesilsa kesimda

va $\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} \end{cases}$

giperbolalar hosil bo’ladi. Agar ikki pallali giperboloidni Oxy tekislikka parallel *z=h (| h | >c)* tekislik bilan kesilsa kesimda

f£_£ = £,,l

■p Z>-’ *c! ’* (14.9) yoki $\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)} =$

\h ortganda ortadi *h=±c* bo’lganda (14.9) kesim tenglamasi 4_ + 4_ = 0 *a' b’*

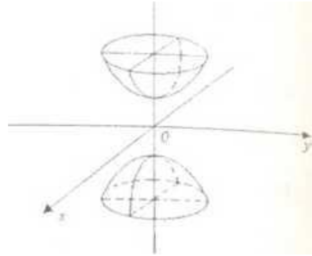
z - h

ellips hosil bo’ladi. Bu ellipsning yarim o’qlari д-a. 'll?"1

ko’rinishga ega bo’lib bu tenglamani faqatgina x=0. y-0 qiymatlar qanoatlantiradi xolos. Demak bu holda tekislik bilan ikki pallali giperboloidning kesishish chizig'i ellips C|(0;0,c) va <?$_2$(0,0;-c’) nuqtalarga aylanar ekan.]A| <c bo’lganda (14.9) dan

tengsizlikka ega bo’lamiz. Bu tengsizlikning chap tomonidagi ifoda nomanfiy ekanini hisobga olsak tengsizlik hech qachon bajarilmasligini ko’ramiz. Demak, bu holda tekislik bilan (14.8) ikki pallali giperboloid kesishmas ekan.

O’tkazilgan mulohazalarga asoslanib ikki pallali giperboloidni 77-chizmada ko’rsatilgan sirt kabi tasvirlaymiz.



77-chizma

14.9. Elliptik paraboloid

—+ ^- = 2z
(14.10)
P Я

ko’rinishdagi kanonik tenglamaga ega ikkinchi tartibli sirt **elliptik paraboloid** deb ataladi.

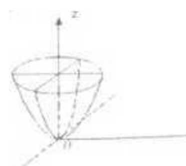
Bu yerdagi *p* va *q* bir xil ishorali ma‘lum sonlar. Kelgusida aniqlik uchun p>0, r/>0 deb olamiz.

Elliptik paraboloidning shaklini aniqlaymiz. Elliptik paraboloidni Oxz va *Oyz* tekisliklar bilan kesilsa kesimda shu tekisliklarda yotgan x^2 v^2
z = — va *z*--—
Ip *2p*
parabolalar hosil bo’ladi. Uni Oxy tekislikka parallel *z~h* (Л>0) tekislik bilan

kesilsa kesimda *z-h* tekislikda yotgan _л—+ _2L. =] ellips hosil bo’ladi.
2 *ph 2qh*

Bu ellipsning yarim o’qlari *a-j2ph* va *b = fiqh,* h ortsa ortadi.

Shunday qilib o’tkazilgan mulohazalar elliptik paraboloidni Oлу tekislikdan *Q*z o’q yo’nalishda cheksiz uzoqlashgan sari kengayib boradigan «qozon» sifatida tasvirlash imkononi beradi. 0(0,0;0) nuqta elliptik paraboloidning uchi, *p* va *q* sonlar uning parametrlari deyiladi. /?•-</ bo’lganda aylanma paraboloid hosil bo’ladi. Elliptik paraboloid 78-chizmada tasvirlangan.



78-chizma

14.10. Giperbolik paraboloid

— -~ = 2r (14.11)
P <7

ko'rinishdagi kanonik tenglamaga ega ikkinchi tartibli sirt **giperboiik paraboloid** deb ataladi. Bu yerdagi *p* va *q* bir xil ishorali ma'lum sonlar. Aniqlik uchun kelgusida p>0, *q>0* deb olamiz.

Giperboiik paraboloidni *Qxz* tekislik bilan kesilsa kesimda shu tekislikda yotgan $2pz=x^2$ parabola hosil bo'ladi. Bu sirtni *Qxz* tekislikka parallel *y=h* tekislik bilan kesilsa kesimda shu tekislikda yotgan parabola hosil bo'ladi. Bu parabolaning uchi simmetriya o'qi Oz bo'ylab yo'nalgan.

Berilgan paraboloidni *Oyz* (x=0) koordinata tekisligi bilan kesilsa kesimda shu tekislikda yotgan va uchi koordinatalar boshida bo'lib $\left(0,0,-\frac{h^2}{2q}\right)$ nuqtada bo'lib uning Oz simmetriya o'qiga ega, pastga yo'nalgan z = -— parabola hosil bo'ladi.

2<?

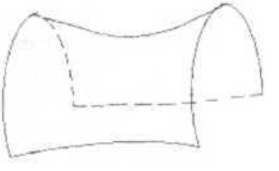
Agar paraboloidni *Qyz* tekislikka parallel *x=h* tekislik bilan kesilsa kesim ham parabola bo'lishini ko'rish qiyin emas.

Paraboloid Oxy tekislikka parallel *z^h* tekislik bilan kesilsa kesimda

— - — = 2Л yoki *p q* 2 *ph*

giperbola hosil bo'ladi.

O'tkazilgan mulohazalar giperboiik paraboloidni egarsimon sirt ko'rinishida tasviriash imkonini beradi. Koordinatalar boshi giperboiik paraboloidni **uchi,** *p* va *q* sonlar esa uning **parametrlari** deb ataladi. Giperboiik paraboloid 79-chizmada tasvirlangan.



79-chizma

2- **misol.** Markazi koordinatalar boshida bo'lib radiusi 4 ga teng sferaning kanonik tenglamasi yozilsin.

Yechish.Sferaning kanonik tenglamasi (14.5) га /?=4 qiymatni qo'ysak $x^2+y^2+?=16$ tenglama hosil bo'ladi.

3- ммсол. Markaziy $0_($(-2:3;l) nuqtada bo'lib radiusi *R=6* bo'lgan sferaning kanonik tenglamasi yozilsin.

Yechish. Sferani tenglamasi (14.4) ga <?=-2. 6=3, c=1, *R-6* qiymatlarni qo'ysak uning kanonik tenglamasi

(л-'2)$^{:}$-Ку-3у+(--|)-=36 kelib chiqadi.

4- **misol.** Markazi $0_($(3;-2;-l) nuqtada bo'lib radiusi /?=5 bo'lgan sferaning umumiy tenglamasi topilsin.

Yechish. Sferaning kanonik tenglamasi (14.4) ga <7=3; 6=-2, c=-l; *R-5* qiymatlarni qo'ysak

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z+l)^2=5^2$$

yoki qavslarni ochib ixchamlasak sferaning umumiy tenglamasi

$$x^2+y^2+z^2-6x+4y+2z-11=0$$

hosil bo'ladi.

5- **misol.** x"+y'+z'-6x+8y+10z+25=0 sferaning markazini koordinatalari va radiusi topilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani (14.4) ko'rinishda yozamiz. Buning uchun avvalo bir xil koordinatalar qatnashgan hadlarni guruhlaymiz, ya'ni tenglamani

(x'-6x)+(y"+8y)+(z"+10z)+25-0 ko'rinishda yozamiz. Qavs ichidagi ifodaiarni to'la kvadrat shaklida yozish maqsadida ularga to'la kvadrat bo'lish uchun kerakli bir xil sonlarni ham qo'shamiz. ham ayiramiz.

$(x^2-6x+9-9)+(y^2+8y\ 116-16)+(?+10z+25-25)+25=0;$

$(x-3)^2-9+(yM)^2-1\ 6+(z+5)^2-25+25=0,\ (x-3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=25.$

Hosil bo'lgan tenglamani sferaning kanonik tenglamasi (14.4) bilan taqqoslasak, <7=3, Z>=-4, c=-5, /r=25 ekaniga iqror bo'lamiz. Shunday qilib $0_t(3,-4,-5)$ nuqta sferaning markazi bo'lib uning radiusi *R-5* ekan.

6- **misol.** x^2+y^2-4y-0 tenglama qanaqa sirtni ifodalaydi.

Yechish. Tenglamani $x^2+y^2-4y+4-4=0$, $(x-0)^2+(y-2)^2=2^2$ ko'rinishda yozsak u Oxy tekisligidagi aylanani ifodalashi kelib chiqadi. Fazoda bu tenglama yo'naltiruvchisi shu aylanadan iborat yasovchisi *Qz* o'qqa parallel doiraviy silindrni ifodalaydi.

7-misol. $Jx^2 + y^2 + (z-7)^2 = 16,$

tenglamalar sistemasi qanaqa egri chiziqni ifodalaydi?

Yechish. Sistemani birinchi tenglamasi markazi 01(0,0,7) nuqtada va radiusi 7?=4 bo'lgan sferani tenglamasi, ikkinchisi esa Oxy tekislikka parallel va (0,0,6) nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi. Ular albatta z-6 tekislikda yotuvehi aylana bo'yiab kesishadi.

Shunday qilib berilgan tenglamalar sistemasi ana shu aylananing tenglamasi ekan.

yozamiz. Berilgan sistemadan z $^{n}*$

Endi shu aylananing tenglamasini boshqaeha shaklda sistemaning birinchi tenglamasiga z=6 qiymatini qo'yib yo'qotamiz.

$lx^2 + y^2 + (6-7)^2 = 16.$ f.

U = 6 [.

Oxirgi

ega doiraviv silindini ifodalaydi, ikkinchisi esa Oxy tekislikka parallel tekislik. Bu yerdagi sistemaning birinchi tenglamasi $x^2+y^?=!5$ Oxy tekislikdagi aylanani ifodalaydi. Bu aylana doiraviy silindr bilan *z* 6 tekislikning kesishishi oqibatida hosil bo'lgan ay1aпап'п, Oxy tekislikdagi procksiyasidir.

8- **misol.** x^2+y^2-R' aylanani Ox o'q atrofida aylanishi natijasida hosil bo lg^{an} aylanish sirti-sferaning tenglamasini yozing.

Yechish. Berilgan aylanani Ox o'q atrofida aylanishi natijasi hosil bo ig^{aI1} sirt tenglamasini topish uchun aylananing tenglamasida aylanish o'qiga ^{nl0S} koordinatani o'zgarishsiz qoldirib ikkinchi o'zgaruvchi *y* o'rniga ± $yjy^2 + z^2$ ifoda qo'yiladi. U holda aylanish sirti tenglamasi

$$x^2 + (\pm\hat{} y^2 \; i \; z^2)^2 = R^2 \text{ yoki } x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglama sferaning tenglamasi ekanligi ma'lum

9- misol. — + — + — =] ellipsoidni koordinata tekisliklari bilan kesishish 25
16 4
chiziqlari, ularning uchlari hamda yarim o'qlari topilsin.

Yechish. *Oxy* tekislik *z=0* tenglamaga ega. Ellipsoid tenglamasiga z=0 qiymatni qo'ysak ellipsoid bilan *Oxy* tekislikning kesishish chizig'i

■j 25 16
[y = °

ellipsning tenglamasiga ega bo'lamiz. Ellipsoidning uchlari ellips uchlarini ham aniqlaydi. Ellipsoidning *Oxy* tekislikda yotuvchi uchlari Л|(-5,0,0), Л(5;0;0), /?i(0,-4,0) Z?(0;4;0) koordinatalarga ega.

Shuningdek berilgan ellipsoidni *Oxz* (y=0) tekislik bilan kesganda kesimda

[v = o

ellips hosil bo'lib uning uchlari /1i(-5;0;0); Л(5;0;0), Ci(0;0;-2) va C(0;0;2) nuqtalarda joylashgan.

Ellipsoidni *Oyz* (л=0) tekislik bilan kesilsa kesimda

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{4} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

ellips hosil bo'lib uning uchlari Z?|(O;-4;O) /?(0;4;0) Cj(0;0;-2) va C(0;0;2) nuqtalardan iborat bo'ladi.

Ellipsoidning berilgan tenglamasini uning kanonik tenglamasi (14.6) bilan taqqoslasak <7^2-25; *a=5, b^2~~\6, b=4, c~-4, c~2* ellipsoidning yarim o'qlari hosil bo'ladi.

10- **misol.** 16x^2+25yH00z^2-32x+50y-359=0 sirt tenglamasi kanonik ko'rinishda yozilsin va sirtning turi aniqiansin.

Yechish. Avvalo bir xil koordinatalar ishtirok etgan hadlarni guruhlab berilgan tenglamani

(16x^2-32x)+(25y+50v)+ ЮОг-359-О yoki 16(?-2x)+25(v^2+2v)+100?-359=0 ко rinishda yozamiz. Qavs ichidagi ifodani to'la kvadrat shaklida yozish tnaqsadida qavs ichidagi ifodalarga 1 ni ham qo shamiz ham ayiramiz. U holda

1 6(А-^{2}-2Х+ 1 -1 *)+25(y^2+2y*+1 -1)+100?-359=0;

16[(x-l)^2-1)]+25[(yH)^2-1)]+100?-359=0; 16(л-1)^2-16+25(y4 1)^2-25+100(--0)^2-359=0;

16(x-1)^2+25(JH- I)^2+100(г-0)^2=400;

yoki tenglamani 400 2a bo'lsak -- - + 12_ 4 _ 1?_ + b—92_ = i
25 16 4

tenglamaga ega bo'lamiz. x-I=A^z, y+1=У, _=Z almashtirish olsak

$$\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{16} + \frac{Z^2}{4} = 1$$

ellipsoidning kanonik tenglamasi kelib chiqadi.

Shunday qilib berilgan tenglama ellipsoidni ifodalab "eski" sistemani 0_t(l,-l;0) nuqtaga parallel ko'chirilsa uning tenglamasi "yangi" 0>.¥У sistemaga nisbatan kanonik ko'rinishga ega bo'lar ekan.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1- misol. Markazi C(l;4;-1) nuqtada bo'lib radiusi /?=8 bo'lgan sferaning kanonik tenglamasi yoziisin. Javob: $(x-1)^2+(y-4)^2$ +-$(z+l)^2$-64.

2- misoi. Markazi C(-l;-2;-4) nuqtada bo'lib radiusi R=6 bo'lgan sferaning umumiy tenglamasi yoziisin. Javob: $x^2+y^2+z^2+2x+4y+8z$-15=0.

3- misol. $x^2+y^2+z^2$±x-yi z=0 sferaning markazi va radiusi topilsin.

Javob: 0) (_1 1 _ly R =
2'2' 2 ' 2

4- misol. Markazi 0!(5;7;-l) nuqtada bo'lgan va koordinatalar boshidan o'tuvchi sfera tenglamasi yoziisin. Javob: $(x-5)^2+(y-7)^2+(z+l)^2=75$.

5- misol. y^2+z^2-2az=0 tenglama qanaqa sirtni ifodalaydi? Javob: Yasovchisi Ox o'qqa parallel doiraviy silindrni.

6- мисол. ; A ' tenglamalar sistemasi qanaqa egri chiziq tenglamasini
[z =9
ifodalaydi? Javob: Markazi 0|(0;0;9) nuqtada bo'lib radiusi 3 ga teng va Oxy tekisligiga parallel z=9 tekislikda yotgan aylanani.

7- inisol. ~ + d__ = i ellipsni I) Ox o'q; 2) Oy o'q atrofida aylanishi natijasida
a~ c
hosil bo'lgan aylanish sirtlarini tenglamalarini yozing.

Javob: 1) ~- = l-aylanish ellipsoidi;
a~ c^1 c

2) ^- + —+ ^--1 -aylanish ellipsoidi.
a~ a~ c'

8- misol.y'=x parabolani Ox o'q atrofida aylanishi natijasida hosil bo'lgan sirtni tenglamasi yoziisin va sirt yasalsin. Javob: x y4-^{2} • aylanish parabuloidi.

9- misol. A + - -i ?-- = l ellipsoidni koordinata tekisliklar bilan kesishish
64 49 25
chizig'ining tenglamalari yoziisin va ularning uchlari hamda yarim o'qlari iopns[iib] Javob: I)kesim tenglamalari

a) $\frac{x^3}{64}+\frac{v^3}{49}=l$, Z = 0   b) • $\frac{x^3}{64}$- + $\frac{v^3}{25}$ = 1, y = 0   d) y^3 -^{3} 49 $^+$ 25, x = 0.

2) ellipsoidning yarim o'qlari: <7=8; 6=7; c=5;

3) ellipsoidning uchlari: Л|(-8;0;0), /?(8;0;0), B)(0;-7;0), Z?(0;7;0), C_t(0;0-5) va C(0;0;5).

10-misoi. 1) $x^2+y^2-z^{2=;}$0; 2) $z=x^2+y^2$; 3) y^2+z^2 - ~ = 0; 4) - -I J
o 4 1/

5) — - — + — -1 = 0; 6) $-x^2$ + ^- + —= 0; 7) $z=-(x^2+y^2)$; 8)z=l-x^2-/
5 4 2 4 6

tenglamalar bilan qanaqa sirtlar aniqlanadi. Javob:

I. O'qi Oz o'qdan iborat doiraviy konus.

2.O'qi Oz o'qdan iborat aylanish paraboloidi.

3.0'qi Ox o'qdan iborat doiraviy konus.

4. Aylanish o’qi Oj, o’qdan iborat ikki pallali giperboloid.
5. Bir pallali giperboloid.
6. O’qi Ox o’qdan iborat konus.
7. Uchi koordinata boshida bo’lib o’qi Oz o’qdan iborat aylanish paraboloidi.
8. Uchi 0|(0;0; I) nuqtada bo’lib o’qi Oz o’qdan iborat va pastga yo’nalgan aylanish paraboloidi.

II. $л^{-2} + y^2 + z^2 - 2(x + ,v - z) - 6 - 0$ tenglama qanaqa sirt tenglamasini ifodalaydi? A) sfera B) ellipsoid D) bir pallali giperboloid E) ikki pallali giperboloid F) hech qanaqa sirtni ifodalamaydi.

12. $x^2 + / + z^2 + 6x - 2y + 4z + 14 = 0$ tenglama nimani ifodalaydi?

A) sfera B) ellipsoid D) bir pallali giperboloid E) ikki pallali giperboloid F) paraboloid.

13. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4j > -6z + 17 - 0$ tenglama qanaqa sirt tenglamasini ifodalaydi?

A) sfera B) ellipsoid D) bir pallali giperboloid E) ikki pallali giperboloid F) paraboloid.

14. = 1 tenglama Oxyz fazoda nimani ifodalaydi. *a~ b~*

A) ellipsni B) giperbolani D) parabolani E) konusni F) elliptik siiindrni.

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli sirt deb nimaga aytiladi?
2. Silindrik sirt deb nimaga aytiladi?
3. Silindrik sirtning yo’naltiruvchisi va yasovchisi nima?
4. Aylanish sirti nima?
5. Konussimon sirt nima?
6. Sferaning ta‘rifini aytingva tenglamasini yozing?
7. Ellipsoid deh nimaga aytiladi? Uning yarim o’qlari va uchi nima?
8. Bir pallali giperboloid nima?
9. Ikki pallali giperboloid nima?
10. Elliptik paraboloid nima?

11 • Giperbolik paraboloid nima?

12. Ikkinchi tartibli konus nima?
13. (14.1) tenglama har doim ham sirtniifodalaydimi?

15- та‘гига. Mavzu: Bir o’zgaruvchining funksiyasi

Reja:

1. O’zgaruvchi va o’zgarmas miqdorlar.
2. Funksiya tushunchasi.
3. Asosiy elementar funksiyalar, ularning aniqlanish va o’zgarish sohalari, grafigi.
4. Murakkab funksiya. Elementar funksiya.
5. Butun va kasr-ratsional funksiyalar.
6. Funksiyaning juft va toqligi, davriyligi.
7. Monoton funksiyalar.
8. Funksiyaning chegaralanganligi.

Adabiyotlar: 3,5,8,9,12,16.

Tayanch iboralar: o’zgarmas, o’zgaruvchi, erkli, erksiz, argument, funksiya, kesma, segment, interval, atrof, aniqlanish sohasi, o’zgarish sohasi, grafik, murakkab funksiya, oraliq argument, elementar funksiya, ko’phad, kasr- ratsional funksiya, juft va toq funksiya, o’suvchi va kamayuvehi funksiya, monoton funksiya, chegaralangan funksiya, noto’g’ri va to’g’ri kasrlar.

15.1. O’zgaruvchi va o’zgarmas miqdorlar

Inson o’z faoliyati davomida hajm, yuza, uzunlik, vaqt, bosim, harakat, tezlik, og’irlik kuchi, elektr tokining kuchi va hokazo kabi miqdorlarga duch keladi. Bu miqdorlar mazmun jihatidan turlicha bo’lsada ularning o’zlariga xos umumiylik tomoni ham bor bo’lib ularni o’lchash mumkiniigidadir. Ularni o’lchash natijasida bu miqdorlarning son qiymatlari deb ataluvehi sonlar hosil bo’ladi. Bir xil miqdorlarni turli vaqtda va turli sharoitda o’lchansa uni sonli qiymati turlicha bo’lishi mumkin. Masalan avtomobil tezligi yo’lning har xil qismida yoki har xil vaqtda turlicha sonli qiymatlarga ega bo’ladi. Shuningdek yopiq idishdagi gazning bosimi ham har xil haroratda har xil bo’ladi. Istalgan qavariq ko’pburchakning tashqi burchaklari yig’indisi har qanday ko’pbuchak uchun o’zgarmas va 360° ga teng. Bu misollardan ko’rinib turibdiki miqdorlar har xil son qiymatlarni qabul qilishi yoki faqat birgina sonli qiymatni qabul qilishi ham mumkin ekan. Har xil sonli qiymatlarni qabul qiladigan miqdorning o’zim o’zgaruvchi miqdor deb ataladi.

Qaralayotgan sharoitda o’zini sonli qiymatlarini o’zgartmaydigan miqdor **o’zgarmas miqdor** deb ataladi. Matematikada miqdorni uning fizik ma nosidan qat'iy nazar qabul qilishi mumkin bo’lgan sonli qiymatlari to’plami berilganda o’zgaruvchi miqdor berilgan deb insoblanadi. O’zgarmas miqdorni sonli qiymatlaii to’plami birgina sondan iborat o’zgaruvchi miqdorning xususiy ko’rinishi deb qarash mumkin.

O’zgarmas miqdorlarga ko'plab misoliar keltirish mumkin: aylana uzunligining uning diametriga nisbati (л), uchburchakning ichki burchaklari yig’indisi (180°), yorug’likning bo’shliqdagi tezligi (299,800 km/sek), er in tushayotgan jismning tezlanishi (9,81 m/sek^2), kvadrat diagonalining u^{nin}S tomoniga nisbati (v2) o’zgarmas miqdorlardir.

Bir miqdorning o’zi vaziyatga qarab o’zgaruvchi yoki o’zgarmas bo’lishi ham mumkin. Masalan tekis harakat qilayotgan jismning tezligi o’zgarmas, erkin tushayotgan jismning tezligi esa o’zgaruvchidir.

O’zgarmas miqdorlarni *a.b.c,...* harflar bilan belgilanadi. O’zgaruvchi miqdorlarni esa *x, y, z,...* harflar bilan belgilanadi. O’zgaruvchi miqdorlarning barcha son qiymatlari to’plami shu o’zgaruvchining **o’zgarish sohasi** deyiladi. O’zgaruvchi miqdorlarning sonli qiymatlari haqiqiy sonlarning qandaydir to’plamini tashkil etadi. Bunga sonlar o’qining ma‘Ium nuqtalari to’plami mos keladi. Kelgusida kesma (segment) va interval deb ataluvchi sonlar to’plamlari bilan ko’proq ish ko’ramiz. O’zgaruvchi miqdor *x* ning ma‘lum *p* xossaga ega qiymatlari to’plamini {x. *p}* kabi belgilaymiz.

a va *b* sonlar (yoki ikkita nuqta) berilgan bo’lib $a<b$ bo’lsin. a<x</> tengsizliklarni qanoatlantiradigan x sonlar to’plami {x: $a<x<b$} **kesma** yoki **segment** deb ataladi va orqali belgilanadi. *a* va *b* kesmaning **uchlari** (yoki **oxirlari)** deb ataladi, hamda (qaralayotgan holda *a* va *b* sonlar ham to’plamga tegishli bo’ladi). жх<6 tengsizliklarni qanoatlantiradigan x sonlar to’plami {x: $a<x<b$} **intenrval** deb ataladi va *(a,b)* kabi belgilanadi. **Bu** holda intenrvalning *a* va *b* oxirlari sonlar to’plamiga tegishli bo’lmaydi. $a<x<b$ yoki $a<x<b$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan x sonlar to’plami {x: $a<x<b$} yoki {x: $a < x < b$ } **yarim ochiq kesma** yoki **yarim yopiq interval** deb ataladi hamda (a,&] yoki [<?,/>) kabi belgilanadi.

Kiritilgan kesma yoki interval tushunchalari nafaqat sonlar to’plamiga tegishli, balki unga mos sonlar o’qining nuqtalari to’plamiga ham tegishiidir. Masalan, [я.л] kesmaga sonlar o’qining oxirlari *a* va *b* nuqtadan iborat kesmasi mos kelib bu holda kesmaning oxirlari *a* va *b* nuqta ham kesmaga tegishli bo’ladi. *(a,b)* intervalga ham sonlar o’qining oxirlari *a* va *b* nuqtalardan iborat kesmasi mos kelib bu holda kesmaning oxirlari kesmaga tegishli bo’lmaydi. x biror *X* to’plamga tegishli bo’lganda xe .V va u shu to’plamga tegishli bo’lmaganda *xч X* kabi yoziladi. Masalan *N* natural sonlar to’plami bo’lganda 3e/V,0fs/V, *[*-<*zN*. Shuningdek: 3e [2.4], 5g [0,3], 2g(o,2).

Ba‘zi hollarda cheksiz intervallar va cheksiz yarim intervallar bilan ish ko’rishga to’g’ri keladi. Ular quyidagicha ta’riflanadi va belgilanadi:

(x :x> *a}* — (zx+oo), {x : x > a }= [o;+co), (x: x</>}=(-00; 6), (x: x < fc}-(-oo; *b]*.

Biitun sonlar o’qini (barcha haqiqiy sonlar to’plamini) cheksiz interval (~«X+co) ko’rinishida tasvirlash mumkin. Ba'zan kesma, interval, yarim ochiq yoki yarim yopiq intervallarni **oraiiqlar** deb ham ataymiz.

Endi muhim tushunchalardan biri nuqtaning atrofii tushunchasini kiritamiz. c nuqtaning atrofi deb shu nuqtani ichiga olgan har qanday *(a.b), (a<c<b)* intervalga aytiladi. Markazi *c* nuqtada va uzunligi 2e (e>0) bo’lgan (c-f. c+e) interval *c* nuqtaning г-atrofi deb ataladi (80-chizma). |x-c|<f tengsizlik -£<x-c<f yoki *c-£<x<c+ £* tengsizliklarga teng kuchli ekani maktab kursidan

ma‘lum. Demak l.v - c| < *e* tengsizlik ham *c* nuqtaning c-atrofini anglatar ekan ya‘ni x e (c - *s*, c + .s).

80-chizma.

15.2. Funksiya tushunchasi

Har xil tabiat hodisalarini o’rganishda ko’ramizki unda bir-biriga bo^’liq bir necbta o’zgaruvchi miqdorlar ishtirok etadi. Masalan o’zgarmas haroratda yopiq idishdagi gazning bosimi idishning hajmiga teskari proporsional. Hajm o’zgarganda gazning bosimi ham unga bog’liq ravishda ma’lum qonuniyat asosida o’zgaradi, Shuningdek ishbay asosida haq oladigan ishchining ish haqi u ishlab chiqaradigan mahsulotining miqdoriga bog’liq, ya‘ni ishchi qancha ko’p mahsulot ishlab chiqsa u shuncha ko’p maosh oladi. Doiraning radiusi o’zgarganda uning yuzi ham ma‘lum qonun assosida unga bog’liq ravishda o’zgaradi. Agar doiraning yuzini S' va radiusini *R* orqali belgilasak, uning yuzi

$$S\wedge TIR^1$$

kabi topilar edi. Bu yerdagi *л* o’zgarmas son, *R* esa doiraning radiusi bo’lganligi uchun u faqat musbat qiymatiarni qabul qiladi va biz istagan doirani qaraganimiz uchun u ixtiyoriy musbat qiymatni qabul qilishi mumkin, ya‘ni *R* e (O; +»).

Doiraning radiusi *R* ning o’zgarishi uning yuzi S'ni ham ma‘lum qonuniyat asosida o’zgarishga majbur etadi. *R* ning har bir aniq qiymatiga S ning bitta aniq qiymati mos keladi. Bunday holda doiraning yuzi uning radiusining funksiyasi deb ataladi. Bunga o’xshagan ko’plab misollarni kcltirish mumkin. Ularda bir o’zgaruvchining o’zgarishi ikkinchi o’zgaruvchining ma‘lum qonuniyat asosida o’zgarishga majbur etadi. Masalan yopiq idishda ma‘lum miqdordagi gaz qaralsa harorat o’zgarmagan holda idishning kichrayishi gaz bosimini oshishga majbur etadi. O’zgaruvchi miqdorlarni biri ikkinchisiga bog’liq ravishda o’zgarishi funksiya tushunchasiga olib keladi.

Ikkita x vay o’zgaruvchi miqdorni qaraymiz.

1- **ta‘rif.** Agar x miqdorning *D* sohadagi har bir qiymatiga biror qonun yoki qoida bo’yicha y ning biror *E* sohadagi aniq bir qiymati mos qo’yilsa, *У* o’zgaruvchi miqdor x o’zgaruvchi miqdorning **funksiyasi** deb ataladi.

Bu holda j miqdor x ning bir qiymatli funksiyasi deb yuritiladi.

O’zgaruvchi x miqdor **erkli o’zgaruvchi** yoki **argument,** y miqdor esa **erksiz o’zgaruvchi** yoki **funksiya deb** ataladi.

)• ningx o’zgaruvchining funksiyasi ekanligi ramziy lai/.da

>-./(x) ko’rinishda yoziladi (o’qilishi: ytengefx). y = /(x) funksiyaning argument x ^{nl} aniq A-,, qiymatidagi xususiy qiymati /(.v,,) yoki y| kabi belgilanadi. Masalan, agar /(x-) = 2x + 3 bo’lsa /(l) = 2l+3 = 5, /(0) = 2 0 + 3 = 3, /(2) = 2-2 + 3

Bu yerdagi /, funksiyaning qiymatiga ega bo’lish uchun uning argument ustida qanaqa matematik amallarni bajarish lozimligini ko’rsatadi.

Funksiyani _y = ??(x), y = y(*)> y = Дx),.- ko’rinishda ham belgilash mumkin.

Ba’zan argumentning har bir qiymatiga funksiyaning bir emas birnechta qiymatlari mos keladi. Bunday holda funksiya ko’p qivmatli funksiya deb ataladi. Masalan, $x^2+y^2 = R^2$ aylananing har bir nuqtasining *x* abssissasiga aylananing ordinatalari $y = +\wedge R^2\ x^2$ bo’lgan ikkita nuqtasi mos keladi, ya‘ni bu yerda biz ikki qiymatli funksiyaga duch keldik.

Bundan buyon biz faqatgina bir qiymatli funksiyalar bilan ish ko'ramiz.

2- ta'rif. Argument x ning /(x) funksiya ma'noga ega bo'ladigan qiymatlari to'plami funksiyaning aniqlanish sohasi deb ataladi va *D(f)* orqali belgilanadi.

Masalan /(x) =----------- funksiya x-2 nuqtadan boshqa *x* ning barcha
x — 2

qiymatlarida aniqlangan. x=2 da kasrning maxraji nolga aylanib, funksiya ma'nosini yo'qotadi, chunki hech bir sonni nolga bo'lib bo'lmaydi. Demak *D*^—Ц'] = (- ^{2})u (^{2}; + «0 •

Funksiya biror nuqtada aniqlangan bo'lishi uchun u shu nuqtada O-oo,oo-<z>, 0°, Г,co$^{1'}$ ko'rinishga ega bo'lmasligi lozim, bunda *a-const.* 0 0 00

Shuningdek *y~-^{2}'fflx)* ko'rinishdagi funksiya faqat x ning ^(x)>0 tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatlaridagina aniqlangan.

3- ta'rif. /(.v) funksiyaning qabul qiladigan qiymatlari to'plami uning o'zgarish sohasi yoki qiymatlar sohasi deb ataladi va £(/) orqali belgilanadi. Masalan. E($7>7x)=[-l;l], E(/gx)=(-co; co).

4- ta'rif. *Oxy* tekisiikning koordinatalari *y-f{x)* munosabat bilan bog'langan *P(x,y}* nuqtalarning geometrik o'rni y= /(.r) funksiyaning grafigi deb ataladi.

Funksiyaning grafigi uning asosiy xossalarini shu grafikka qarab aytish imkonini beradi. Har qanday funksiya ham grafikka ega deb o'ylash noto'g'ri.Masalan Dirixle funksiyasi deb ataladigan

11. *x ratsional son bo'Isa.*
Dyx} = \ (0, x *irratsional son bo'Isa*

funksiya grafikka ega emas. Butun sonlar o'qi bu funksiyaning aniqlanish sohasini tashkil etadi, funksiyaning qiymatlari to'plami faqat ikkita son, va'ni 0 va 1 dan iborat. Demak Z2(Z)(x)) = (-oo;co), £(£)(x)) = {(J; 1}.

Endi funksiyaning berilish usullarini qaraymiz.

Funksiya turli usullar bilan berilishi mumkin. Ulardan ko'p uchraydigani analitik, jadval va grafik usullaridir.

.V va *y* o'zgaruvchi orasidagi moslik formula orqali 'fodalangand

funksiya **analitik usulda** berilgan deb ataladi. Masalan: y = .v^2, 1

7 X4 1

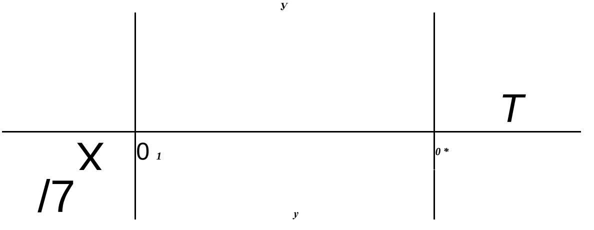
Funksiya aniqlanish sohasining turli qismlarida turlicha formulalar orqali berilishi ham mumkin. Masalan,

$$signx \sim \begin{cases} 1, \ agar\ x > 0\ bo'lsa, \\ 0, \ agar\ x = 0\ bo'lsa, \\ -1, \ agar\ x < 0\ bo'lsa. \end{cases}$$

x va *y* o'zgaruvchi orasidagi bog'lanish jadval ko'rinishida ifodalanganda funksiya **jadval usulda** berilgan deb ataladi. Masalan, logarifmik, trigonometrik funksiyalarning qiymatlari jadvallari funksiyaning jadval usulda bcrilishiga misol bo'la oladi.

Funksiya grafik usulda berilganda uning grafigi ma'lum bo'lib argumentning turli qiymatlariga mos keluvchi funksiyaning qiymatlarini bevosita ana shu grafikdan topiladi.

15.3. Asosiy elementar funksiyalar, ularning aniqlanish va o'zgarish sohalari, grafigi



81-chizma.

1. *y-C* -o'zgarmas(konstanta) funksiya, bunda C -o'zgarmas son.
2. *y* = .v'[1] -darajali funksiya, bunda *n* noldan farqli son.
3. *y - a'* -ko'rsatkichli funksiya (u > u. *a* +1).
4. v - *(.og x* -logarifmik funksiya (*a* > 0. *a* * 1).
5. *v-sinx. v--cosx. y—tgx, y-clgx* -trigonometrik funksiyalar.
6. *y-arcsinx. y arccosx.* y *arctgx. y arcctgx* -teskari (rigonome[ri] funksiyalar.

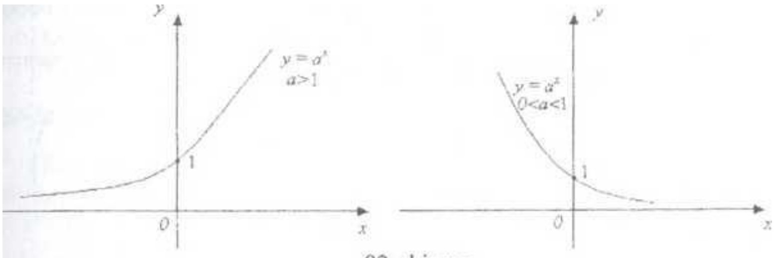
Bu funksiyalar **asosiy elementar funksiyalar** deb ataladi. funksiyalarning aniqlanish va o'zgarish sohalarini hamda grafiklari [1] tanishamiz.

Г. *y-C* -o’zgarmas funksiya butun sonlar o’qida aniqlangan bo’lib uning qiymatlari sohasi birgina *C* sondan iborat, ya‘ni *D(C)* = (-oo;+oo), £(C) = C.Bu funksiyaning grafigi Ox o’qqa parallel to’g’ri chiziqdan iborat ekanligi aytib o’tilgan edi.

2. *y = x"* -darajali funksiyaning aniqlanish va o’zgarish sohalari hamda grafigi *n* ko’rsatkichga bog’liq. Masalan, D(A) = D(.r^2) - D(.t^3) =(-«?;+<»), £(x) = (-oo;+oo), £(A-^{2}) = [0;+co) . D(Vx) = [0;+oo), £(Vx) = [0;+°o).

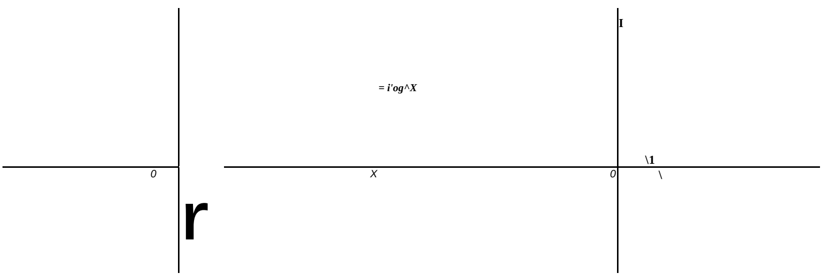
Ba‘zi bir darajali funksiyalarning grafiklari 81-chizmada keltirilgan.

3. *y = a'* ko’rsatkichli funksiya (a>0, <7^1) uchun: £)(#') = (-<»;+o°), £(o') = (0;+a>). Ko’rsatkichli funksiyaning grafigi 82-chizmada tasvirlangan.



82-chizma.

4. logarifmik funksiya(a > 0, *a* * 1) uchun: £(fog,, r) = (0;+•<»), £(fog,,x) = (-<»;+<»). Logarifmik funksiyaning grafigi 83-chizmada tasvirlangan.

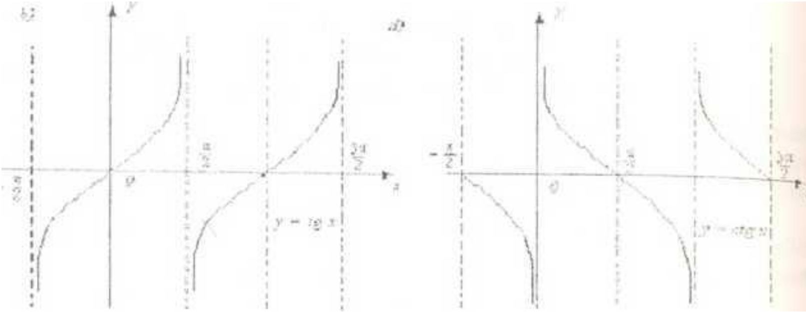


83-chizma.

5. *y=sinx. y-cosx, y-tgx. y=cfgx* -trigonometrik funksiyalar uchun: O(sin.v) = D(cos.v) = (-co:+<z>), £(sin A) = £(cos.v) = |-1: I j. *y - tgx* funksiya son

o’qining (2A i l)y ko’rinishdagi nuqtalaridan farqli, *v-ctgx* funksiya esa son o’qining V-A-ZT (A'-butun son) ko’rinishdagi nuqtalaridan farqli barcha nuqtalarida aniqlangan. £(/gv)= £(c/gr) = (-«>;+<»). Trigonometrik funksiyalarning grafiklari 84-chizmada tasvirlangan.

6. *y-arcsi/ix, y-arccosx, y-aretgx, y=arcctgx* -teskari trigonometrik funksiyalarning aniqlanish, o’zgarish sohalari hamda ularning grafiklari bilan keyinroq tanishamiz.



84-chizma.

15.4. Murakkab funksiya. Elementar funksiya

Har doim ham funksiyaning argumenti erkli o’zgaruvchi bo’lavermaydi. Ko p hollarda shunday funksiyalar ham uchraydiki, ularning argumentlari boshqa bir o’zgaruvchining funksiyasi bo’ladi. Argumenti *x* o’zgaruvchining funksiyasi, ya‘ni *u = <p(x)* bo’lgan *y = f(u)* funksiyani qaraymiz. Bu holda *y* o’zgaruvchi ham x o’zgaruvchining funksiyasi bo’ladi va u bu holda **murakkab funksiya** yoki funksiyaning funksiyasi deb ataladi hamda y = /[H^{л}")1 kabi belgilanadi.

u argument murakkab funksiyaning **oraliq argumenti** deb ataladi. Masalan, agar *y=tgu*, *u = (og$_{ri}$x* bo’lsa, *yx* ning murakkab funksiyasi bo’ladi: *yig((og$_{a}$x).*

Asosiy elementar funksiyalar va murakkab funksiya tushunchalaridan foydalanib **elementar funksiya** tushunchasiga ta’rif beramiz.

5-ta‘rif. Elementar funksiya deb asosiy elementar funksiyalardan chekli sondagi arifmetik amallar va ulardan olingan murakkab funksiyalardan tuzilgan funksiyaga aytiladi. Asosiy elementar funksiyalarning o’zlari ham elementar funksiyalar sinfiga tegishli. Masalan,

V = <e(l + Sin’A-). v-3$^{w<›inr>}$. V_■ .t-'~ + ^{v} + ^{1} v = sin^{2}3^{r} funksivalarning
A ” -2л + 3

barchasi elementar funksiyalardir.

Izoh. Elementar bo’lmagan, yani noelementar tunksiyaS^{a} (^=/(x)) funksiya misol bo’ladi. Bunda u!=l 2-3 ...» (o’qihshi: en faktorial). Chunki y ni topish uchun kerak bo’lgan amallar soni *n* ning o sishi bilan ortadi, ya’ni u chekli emas. Bundan buyon biz ayrim hollarni hisob$_{a}$a olmaganda faqatgina elementar funksiyalar bilan ish ko’ramiz.

15.5. Butun va kasr-ratsional funksiyalar

6-ta'rif. $y = a_{i)}x''+a_lx''\sim'+a_2x''^{'2}+... + a_{li\_J}x + a,,$ ko'rinishdagi funksiya butun ratsional funksiya yoki ko'phad deb ataladi, bu yerdagi n natural son ko'phadning darajasi, a_u, $a,, a,,$a,^, a_n ma'lum sonlar **ko'phadning koeffitsientlari** deb ataladi.

Masalan, y = 2x +1, $y = 2x^2$ + 3л-+ 4, y = 6x' + 4л-- 7 funksiyalar mos ravishda birinchi, ikkinchi va uchinchi darajali ko'phadlardir.

Birinchi darajali $y = a_ox + a_J$ ko'phad **chiziqli funksiya** deb ataladi.

Umumiylikni buzmaslik maqsadida $y=C$ o'zgarmas funksiyani nolinchi darajali ko'phad deb qarash mumkin: $y = Cx°$.

Odatda n-darajali ko'phadni $P_h(x)$ kabi yoziladi.

7-ta'rif. Ikki ko'phadning nisbati **kasr-ratsional funksiya** yoki **ratsional**

,ɔ **-i** ɔ* , £?,,(*) $b_{(,}x''‘ +b,x'''\sim' +b_2x'''\sim^2 +... + b,,,\text{^}x + b_m$

kasr deyiladi. $R(x) =$ ~--------------------- —r-------- —----- .

$R(x) =$ ^ - „■ „2

$P_{,,}(x)$ $a_ux'' + a.x + a_2x + ... + a_{il4}x + a_H$

Kasrning suratini darajasi maxrajining darajasidan kichik $(m<ri)$ bo'lganda kasr *to'g'ri* va aks holda (w>n) kasr **noto'g'ri** kasr deb ataladi. Masalan, v_.<. ..7л' ?. y = y-—x

+3—

funksiyalar kasr-ratsional funksiya

' 4x+6x-l ' 1-л- ' x'+7x + 8

bo'lib, ulardan birinchi ikkitasi noto'g'ri kasr, uchinchisi esa to'g'ri kasrdir.

15.6. Funksiyaning juft va toqligi, davriyligi

8- ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli barcha **x** lar uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik bajarilsa /(x) funksiya **juft funksiya** deb ataladi. Agar har bir л-e £>(/) uchun /(-x) = -/(x) tenglik bajarilsa /(л) funksiya **toq funksiya** deb ataladi. Juft funksiyaning grafigi *Oy* o'qqa nisbatan, toq funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Masalan, *y=x, y = x\ y-sinx* funksiyalar toq $y\text{--}x^2$*,y-x\ y—cosx* funksiyalar juft (81 va 84 chizmalar) funksiyalardir. $y = a^x$,$y\text{-}Cog_ax$ funksiyalar juft ham emas toq ham emas.

Ko'rinib turibdiki juft funksiyaning ham, toq funksiyaning ham aniqlanish sohasi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

9- ta'rif. Agar o'zgarmas 7'/0 son mavjud bo'lib y = /(x) funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli barcha x lar uchun $f(x±T)\sim f(x)$ tenglik bajarilsa $J(x)$ funksiya **davriy funksiya** deb ataladi. /(x±/')=/(x) tenglikni qanoatlantiruvchi musbat fsonlarning eng kichigi *J\x)* funksiyaning davri deb ataladi. Masalan, *ysinx. y~-cosx* funksiyalar davri 2 л- ga teng davriy funksiyalar, *tgx, ctgx* funksiyalar esa davri *я* ga teng davriy funksiyalardir.

15.7. Monoton funksiyalar

s /(x) funksiya biror [<?;£] kesmada (interval, yarim interval bo'lishi ham mumkin) aniqlangan bo'lsin.

10- ta'rif. Agar x ning shu kesmaga tegishli ixtiyoriy ikkita x, va x, qiymatlari uchun x, <x, bo'lganda /(x,)</(x;) (yoki /(x.)>/(x,)) tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya [a; ft] kesmada **o'suvchi** (yoki **kamayuvchi)** deyiladi.

Boshqacha aytganda argumentning katta qiymatiga funksiyaning katta qiymati mos kelsa funksiya o'suvchi deyilar ekan.

Masalan, y--Jx (81-chizma) funksiya [0; + a>) da, y~a' (a>\) (82-chizma) funksiya (-«>; < oo)da, y=($og_{tl}x$ (a > l)(83(a)-chizma) funksiya (0;+<»)da,

(84-chizma) funksiya kesmada, y=$cosx$ (84-chizma) funksiya [-я-o]

kesmada o'suvchi.

Argumentning katta qiymatiga funksiyaning kichik qiymati mos kelganda funksiya kamayuvchi deyilar ekan.

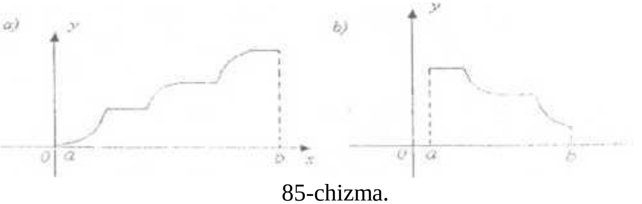
Masalan, y = $_x^2$,y = x'> funksiyalar (81-chizma) (-oc;0) oraliqda, y = a' (0 < a < I) (82-chizma) funksiya (-oo;+co) oraliqda, y = $fog_n x$ (0<a<i) (83-chizma) funksiya (O; + 00)oraliqda, y~$cosx$ (84-chizma) funksiya [O; л-jkesmada kamayuvchi.

[a; ft] kesma /(x) funksiyaning mos ravishda o'sish yoki kamayish **oralig'i** deyiladi. O'suvchi va kamayuvchi funksiyalar **monoton** funksiyalar deb ataladi. Monoton funksiyaning o'sish, kamayish oraiiqlari uning **monotonlik oralig'i** deyiladi.

Funksiyaning o'sish yoki kamayishi haqida gapirganda o'sish yoki kamayish oraiiqlari ko'rsatilishi shart. Chunki bir funksiyaning o'zi bir oraliqda o'ssa u boshqa bir oraliqda kamayishi ham mumkin. Masalan, y=$cosx$ funksiya [-тг;O] orliqda o'sadi, [O; n\ oraliqda esa kamayadi(84-chizma). Shuningdek y - x^2 va, y = x^J funksiyalar ham oraliqda kamayadi, (0;+«>) oraliqda esa o'sadi.

11- ta'rif. Agar x, <x, bo'lganda /(x,)</(x,) (yoki /(x,)>/(x,)) tengsizlik o'rinli bo'lsa, /(x) funksiya [a; ft] kesmada kainaymaydigan (yoki **o'smaydigan) funksiya** deyiladi.

Masalan, 85(a)-chizmada kainaymaydigan, 85(b)-chizmada o'smaydigan funksiyalarning grafiklari tasvirlangan.



85-chizma.

15.8. Funksiyaning chegaralanganligi

12- ta'rif. (o; ft) intervaida aniqlangan y = /(x) funksiya uchun shunday A/ son mavjud bo'lib, (a; ft) dagi barcha x lar uchun |/(x)|<A7 tengsizlik bajarilsa. .)■' = /(•') funksiya (a; ft) intervaida **chegaralangan** deyiladi.

Agar bunday *M* son mavjud bo'lmasa, u holda *y*- /(x) funksiya *(a,b)* intervalda **chegaralanmagan** deb ataladi.

Masalan, y = cosx funksiya (-00; + co) intervalda chegaralangan, chunki bu intervaldagi barcha x lar uchun icosxj < 1, ya'ni A/=l.

v = — funksiya (0;l) intervalda chegaralanmagan, chunki
X |x|

tengsizlikni qanoatlantiruvchi musbat *M* sonni topish mumkin emas, chunki -- kasrning maxraji kichraygan sari u kattalasha boradi. Shu funksiyaning o'zi 0 nuqtani o'z ichiga olmagan istalgan intervalda chegaralangan bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savoliari

1. /(x)-x^2 -3x t-4 funksiya berilgan. 1), Д0),/(-1), topilsin. Javob: 0;4;8.

2. /(x) = x+4 funksiya berilgan. Quyidagi qiymatlar topilsin: a)/(5) b)/(V3)d)/(a + De)/(a^2)f)/(2a).Javob:a)29 b)13 d)a^2 + 2a + 5 e)a^4 +1 f)4<r +4.

1 + x 1 _ 2x + 3
< x J 2 + 3x ' /(x) x +1

3. /(A-) = -^i-~ bo'lsa /-Iva —— topilsin. Javob: /-' =
2 + 3x <AJ /(x) \.xj

4. <p(x)=£g-^-- bo'lsa <^(a)+^(Z>)= ekani isbotlansin.
I-x < *a* + *b)*

5. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasi topilsin.

a)>/9-x^2 ,Ь)73X-2 + *y/9* - 2x ,d) Vx *i a ~>[b- x ,&)-—-* + * ,f) fg(x^2 + 5x + 6),g) *y* = 4 V
x +1

Javob: a)[-3; 3], d) (-- 00; + *>), e)(-a>; - l)u(-1; +<»), f)(-°o; -3)u(-2; +co),

g) (- 00; + co).

6. Quyidagi funksiyalarning grafiklari yasalsin. a) y=2x-3, b)y = ^x^2-l,

d)y = x-x^2, e)y = x^2+2x-3, f) v = — -—, g)y = 3^{*x}, h)y=tog, —, i)y = x'+1,
A- -1 A

j) *У* = fog_2(l-x).

7. a) y=8, b)y = x^2, d)y = sinx, funksiyalardan qaysi biri murakkab funksiya. Javob: y = cos5x^2.

8. Quyidagi funksiyalardan qaysi birlari juft funksiya. a) y = x^2-2x + l,

b)y = x'-l, d)y = sin^2 x + cosx, e) y = Vx , t) y=Л-------------7, g)y = 2^x + 2 ", h)y = Vx'+1
1 + x Javob: d), f), g).

9. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri loq funksiya. a) y-sin'x, b)y = /gx-x,

d)y = x^5-x +1, e)y = vл' +1, f)y = -—r, g)y = 3' -3 v, h) y = -/=!=.
1 + x' ' ■ Vx^2+1

Javob: a), b), g).

10. Quyidagi funksiyalardan davriy bo'lmaganini toping, a) y = sinxcosx, b)y = |cosx|, d)y = rg'x, e)y = sinx + 4, f) y = cos(2x + 3), g) y = *Cgx* Javob: g).

11. Quyidagi funksiyalardan qaysi birlarijo;^ b)y = oraliqda o’sadi. a) y = tgx
ctgx, d) y = sinx, e) y = cosx, f) y = x^2, g) y =-. Javob: a), d), f).

12. Quyidagi funksiyalardan qaysi birlari(-3; 0)oraliqda kamayadi.
a) y = x^2, Ь)y = Д-, d) y = 3~', e) y = fg-. Javob: a), d). X“ X

13. Quyidagi funksiyalardan qaysi birlari(0; l) intervaida chegaralangan

a) y = x’, b) y - sinx, d) y = tgx, y = 3”, e)y = c/gx, f) y ■- -------------------- , g)j, = 1 – -ᵛ ʳsin x ’ h) y - fg(l -x). Javob: a), b), d).

14. 1) 3e<V 2) -5eZ 3) 2G[3,5] 4)V8G(3;4) 5)V2eO yozuvlardan noto’g’risini ko’rsating.
A) 3;5;2 B) 2;3;4 D) 1 ;4;5 E) 3;4;5 F) 2;4;5.

15. 1) y = 2' 2) y = log,x 3) y = x^J+4x + 2 4) y = x^5 5) y = sinx funksiyalardan qaysi birlari o’zlarining aniqlanish sohasida monoton o’sadi?

A) 1;2;3 B) 2;3;4 D) 3;4;5 E) 1;2;5 F) 1;2;4.

16. 1) y-3^v 2) y —log,x 3) y-tgx 4) y=;-— V 4” 1 x - 2 5) V - sin *2xccoix* funksiyalardan [o;|- j

intervaida chegaralanganlarini ko’rsating.

A)l;2;3;4 B) 2;3;4;5 D) 1;2;4;5 E)2;3;4;5 F) 1;3;4;5.

17. 1) y = *cos'x* + *tgx* + 3 2) y = si IF x + *ctgx*- I 3) y =| sinx | 4) y-| cosx)
5)y = $\cos^2$x-$\sin^2$x funksiyalardan davri *я* ga teng davriy funksiyani ko’rsating.

A) 1;2;3;4 B) barchasi D) 2;3;4;5 E) 1;2;3;5 F)1;2;4;5.

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

I .O’zgaruvchi miqdor nima? O’zgarmas miqdorchi?
2.O’zgaruvchi miqdorning o’zgarish sohasi nima?
3. Nuqtaning atrofi, г-atrofi, kesma, interval nima? 9
4. Bir o’zgaruvchili funktsiyaning ta‘rifini ayting. Aniqlanish va o’zgarish sohalari nima.
5. Funksiyaning grafigi nima?
6. Funksiya ko’pincha qanaqa usullar bilan beriladi?
7. Qanaqa funksiyalar asosiy elementar funksiyalar deyiladi? Ularning aniqlanish va o’zgarish sohalanni ayting.
8. Murakkab funksiyaning ta'rifini ayting.
9. Elementar funksiyani ta‘rifini ayting.
10. Butun va kasr-ratsional funksiyalarni la'rifini ayting. Katsion.il kasi qacho[11] to’g’ri va qachon noto’g’ri kasr deyiladi.
II .Funksiya qachon juft va qachon toq deb ataladi.

16- ma‘ruza. Mavzu: O’zgaruvchi miqdorning limiti

Reja:

1. Sonli ketma-ketliklar.
2. Ketma-ketlikning limiti.
3. Monoton chegaralangan ketma-ketlik limitining mavjudligi.
4. Funksiyaning nuqtadagi limiti.
5. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti.

6. Limitga ega funksiyaning chegaralanganligi.
7. Bir tomonlama limitlar.
8. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar.
9. Cheksiz kichik funksiyalarning asosiy xossalari.

Adabiyotlar: 1,2,4,5,6,9,10,11,13,14,15.

Tayanch iboralar: ketma-ketlik, limit, ketma-ketlikning hadlari, umumiy had, yaqinlashuvchi, uzoqlashuvchi, bir tomonlama limit, cheksiz kichik funksiya, cheksiz katta funksiya.

16.1.Sonli ketma-ketliklar

1- ta‘rif. Natural sonlar to’plamida aniqlangan x,,=/(л), *neN* funksiyaning qiymatlari to’plami **sonli ketma-ketliklar** deb ataladi.

Agar n ga 1,2, 3,... qiymatlar bersak, bu funksiyaning

Л-. =/(l),.v₂ = /(2),...,x,, =/(»),...

xususiy qiymatlariga ega bo’lamiz, ular ketma-ketlikning **hadlari** yoki **elementlari** deb ataladi.

Bunda x, ketma-ketlikning birinchi hadi, x, uning ikkinchi hadi va hokazo x,, ketma-ketlikning n-hadi deyiladi. Demak

x(, x,,..., x,,... yoki /(1),/(2),...,/(л)...

sonli ketma-ketlikni tashkil etadi. Sonli ketma-ketlik {x,,} yoki {/(>?)} orqali belgilanadi. Ketma-ketlikning n-hadi x(, =/(>7) uning **umumiy hadi** deb ataladi.

Ketma-ketlikning umumiy hadi ma‘lum bo’lsa u berilgan hisoblanadi.

1- misol. x = funksiya {x ketma-ketlikni beradi.
" 2" [2"J [2 4 8 ' 2" J

2- misol. x,, = 2/7 funksiya {x,,}= (2«}= {2,4,6,....,2»,...}ketma-ketlikni beradi.

3- misol. x,, = l + (-l)" funksiya (xН} = (1 +(-])"}= |u. 2, 0. 2,1)",...} ketma-ketlikni beradi.

4- мисол. x,,=- funksiya {x,,}= j Д = < I, ...ketma-ketlikni beradi.
/7 [/7 J I 2 3 /7 J

Barcha misollarda n natural son, ya‘ni ие V .

Shunday A/ son mavjud bo’lsaki, barcha *n*uchun x,, <A7 tengsizlik bajarilsa, (xj ketma-ketlik **yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik** deb ataladi.

Shunday M>0 son mavjud bo’lsaki, istalgan *ne*,\' uchun x,, >M tengsizlik bajarilsa, {xj ketma-ketlik **quyidan chegaralangan ketma-ketlik** deb ataladi.

Ham yuqoridan ham quyidan chegaralangan ketma-ketlik chega ‘ralangan deb ataladi. Chegaralangan ketma-ketlik uchun shunday AY>0 son mavjud *ne*bo hb barcha *N* uchun !x,,j <M tengsizlik bajariladi.

Agar istalgan *n* natural son uchun *x,,* <x,,+1 tengsizlik bajarilsa, {. monoton **o’suvchi ketma-ketlik** deb ataladi.

Agar istalgan *n* natural son uchun x,, >x,,tl tengsizlik bajarilsa, {.VJ **monoto kamayuvehi ketma-ketlik deb ataladi.**

Agar istalgan *n* natural son uchun x,,>xntl tengsizlik bajarilsa } **o’smaydigan ketma-ketlik** deb ataladi.

Agar istalgan *n* natural son uchun x,,<x11+l tengsizlik bajarilsa, (д- j **kamaymaydigan ketma-ketlik** deb ataladi.

5- misol. (x,,}= yr }= {1,4,9,16 ,и^2,...} -o’suvchi, quyidan chegaralangan ketma-ketlik.

6- misol. {x,,}= (1-2/J}= {-l,-3,-5,....}-kamayuvchi, yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik.

7- misol.{xJ= = Ц,-|,4,....[-o’suvchi, chegaralangan ketma-ketlik
[и + lJ [234 *n* +1 J

16.2. Ketma-ketlikning limiti

a o’zgarmas son va {x,,} ketma-ketlik berilgan bo’lsin.

2- ta‘rif. Agar istalgancha kichik *s>0* son uchun shunday ,V = natural son mavjud bo’Isaki, undan katta barcha *n* lar uchun |x,, -a] < r; tengsizlik bajarilsa, *a* o’zgarmas son (x,,) ketma-ketlikning **limiti** deb ataladi va limx,,=a yoki x,, >*a* kabi belgilanadi.

Agar (x,,} ketma-ketlikning limiti *a* chekli son bo’lsa **ketma-ketlik yaqinlashuvchi,** aks holda ya‘ni *a* mavjud bo’lmasa yoki bo’lsa u **uzoqlashuvchi ketma-ketlik** deb ataladi.

|x,,--a|<f tengsizlik a-c<x,, <<з + £ tcngsizliklarga teng kuchli ekanini ko’rdik. Buni e‘tiborga olsak, limit tushunchasini geometrik nuqtai nazardan bunday tushuntirish mumkin: agar istalgan r>0 son uchun shunday /V-A'GO natural son topilsaki, {x,,}= fa, x2,...., xiV,xiV+1,...} ketma-ketlikning Л'+l- hadidan boshlab barcha hadlari *a* nuqtaning *E*- atrofiga tushsa, ya‘ni *a* nuqtaning atrofiga {.v,,} ketma-ketlikning birinchi *N* ta chekli sondagi hadlaridan tashqan barcha hadlari tushsa, *a* o’zgarmas son fa,} ketma-ketlikning **limiti** deb ataladi.

Shunday qilib *a* o zgarmas son fa,} ketma-ketlikning limiti bo Iganda u nuqtaning istalgan л-atrofi u i-tj da ketma-ketlikning cheksiz ко p hadlari yotadi, г-atrofdan tashqarida ketma-ketlikning chekli sondagi hadlari qoladi xolos-

8- misol. [ketma-ketlikning limiti I ga teng ekanlig
fa + H
ko’rsatilsin.

1 /7 j • I
----------- 1 <£ yoki---------<£■
/7 + 1 I --- Id

tengsizlikni tuzamiz. Biroq n>0, shuning uchun - < E yoki л > -.

Bundan ko'rinadiki, W = sifatida - natural bo'lganda shu sonni o'zini, u natural son bo'lmaganda i -] + l sonni ([/]- x ning butun qismi) olinsa, u holda n ning $n > N(E)$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha qiymatlari uchun

— <£ yoki ——Ii<£ tengsizlik bajariladi. Bu esa lim—— = 1 ekanini |л| |/7 +
1 j "-♦"-/7 + 1
bildiradi.

Masalan, £=0,01 bo'lsa <V=-- =------- = 100 va ketma-ketlikning 101-hadidan
E 0,01
boshlab barcha hadlari a=l nuqtaning 0,01- atrofi (0,99, 1,01) ga tushadi, atrofdan tashqarida ketma-ketlikning chekli, ya'ni 100 ta hadi qoladi. Shuningdek E =0,001 bo'lganda N----^—=1000 va n ning 1001-qiymatidan boshlab barcha hadlari

I n I
uchun —1 <0,001 tengsizlik bajariladi. Boshqacha aytganda bu holda |/7+ 1 j

= ketma-ketlikning 1001-hadidan boshlab barcha hadlari a=l nuqtaning

£•=0,001 atrofi (0,999, 1,001) ga tushadi, bu atrofdan tashqarida esa ketma- ketlikning chekli, ya'ni 1000 ta hadi qoladi xolos.

1- **izoh.** O'zgarmas sonning limiti shu sonning o'ziga teng.

Haqiqatan, o'zgarmas c sonni barcha hadlari shu songa teng bo'lgan ketma- ketlik deb qarash mumkin, ya'ni $x_n=c$. Shuning uchun istalgan E > Oson uchun

|.v,,-c| = |c-c| = 0<r tengsizlik doimo bajariladi.

2- **izoh.** Yaqinlashuvchi ketma-ketlik faqat birgina limitga ega bo'ladi.

Haqiqatan, lim..v(;=«, lim.vH = Z> bo'lib $a*b$ bo'lsin. U holda ketma-ketlik limitining ta'rifiga binoan istalgancha kichik E > 0 son uchun shunday va N_2 natural sonlar topilib n ning /V, dan katta barcha qiymatlari uchun |.v,, a\<e tengsizlik va n ning Л , dan katta barcha qiymatlari uchun |.vH oj tengsizlik bajariladi. /V, va A\ dan kattasini N deb belgilasak n ning N dan katta barcha qiymatlari uchun |л,, -a\< E va |x,, -b\ < E tengsizliklar bir vaqtda bajariladi. Demak ketma-ketlikning v..rl- hadidan boshlab barcha hadlari ham л a nuqtaning ham x~b nuqtaning E-atrofida yotadi. Bu esa $a*b$ bo'lganda ----- dan kichik £• 'ar uchun bajarilmaydi. Bundan $a=b$ ekani kelib chiqadi.

3- **izoh.** Har qanday ketma-ketlik ham limitga ega bo'lavermaydi.

Masalan, {x,,}= {l + (-1)"}= (o, 2,0, 2,..J + (-l)",...} ketma-ketlik hech qan(ja limitga ega emas, chunki uning toq raqamli hadlari 0 ga, juft raqamli hadlari 2 teng bo'lib, |x,,,|-x,,|-2 va^<l bo'lganda n ning barcha qiymatlarida |x tengsizlikni qanoatlantiruvchi a son mavjud emas.

Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning chegaralanganligini eslatib o'tamiz.

16.3. Monoton chegaralangan ketma-ketlik limitining mavjudligi

16.1- **teorema.** Agar {x,,} ketma-ketlik monoton o’suvchi va yuqoridan chegaralangan bo’lsa, u chekli limitga ega.

16.2- **teorema.** Agar {xj ketma-ketlik monoton kamayuvchi va quyidan chegaralangan bo’lsa, u chekli limitga ega.

Bu teoremalarning isbotini keltirmaymiz.

16.4. Funksiyaning nuqtadagi limiti

/(x) funksiya x=a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo’lsin (x=a nuqtaning o’zida aniqlanmagan bo’lishi ham mumkin). -funksiyaning aniqlanish sohasidan limitga ega bo’lgan ixtiyoriy {x,,} = {x$_{ls}$x,, x,,,...} ketma- ketlikni olamiz. /(x) funksiyaning (xj ketma-ketlikning nuqtalaridagi qiymatlari {/fx,,)} ketma-ketlikni tashkil ctadi.

3- ta‘rif. Argument *x* ning *a* dan farqli va unga yaqinlashuvchi barcha (xj ketma-ketliklar uchun y = /(x) funksiyaning shu ketma-ketlik nuqtalaridagi qiymatlaridan tuzilgan {/(x,,)} ketma-ketlik *b* songa yaqinlashsa, *b* son y = /(x) funksiyaning *x a* nuqtadagi (yoki x->u dagi) limiti deb ataladi va fw?/(x) = ft yoki x-»ada /(x)->*b* ko’rinishdayoziladi.

/(x) funksiya x=a nuqtada faqat birgina limitga ega bo’ladi. Bu yaqinlashuvchi {/(x,,)} ketma-ketlikning yagona limitga ega ekanligidan kelib chiqadi.

9-misol. D(x) -*I* | *[\,agar xratsional son bo'Isa,* 0. *agar x irratsionalson bo’lsa.*

Dirixle funksiyasi sonlar o’qining hech bir nuqtasida limitga ega emasligi ko’rsatilsin.

Yechish. Son o’qining istalgan v,, nuqtasini olamiz. x,, ga yaqinlashuvchi argumentning {x,,} ratsional sonlar ketma-ketligiga funksiyaning {ZX-v,,)}—{[1]} qiymatlari ketma-ketligi mos bo’lib uning limiti 1 ga teng bo’lishi ravshan. A'O yaqinlashuvchi argumentning irratsional sonlar ketma-ketligiga iunksiyaning i’D(x,,)}={0} qiymatlari ketma-ketligi mos kelib uning limiti 0 ga teng bo lad[1]- Shunday qilib, x,, ga yaqinlashuvchi argumentning {xj va (xj ketma-ketliklari»a funksiyaning shu kctma-ketliklarni nuqtalaridagi qiymatlaridan tuzilgan va {O(x,,)} ketma-ketliklar har xil limitlarga ega. Bu funksiyaning limitga = bo’lish ta‘rifiga xilof. Demak D(x) funksiya x,, nuqtada limitga ega emas.

nuqta sonlar o’qining istalgan nuqtasi bo’lganligi uchun u sonlar o’qining hech bir nuqtasida limitga ega emas. Shunday qilib Dirixle funksiyasi aniqlanish sohasining hech bir nuqtasida limitga ega emas ekan.

4- ta‘rif. Istalgan f>0 son uchun shunday J>0 son mavjud bo’lsaki, [x-a|<£ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha *a* dan farqli *x* nuqtalar uchun |/(x) - < £ tengsizlik bajarilsa, *b* chekli son /(x) funksiyaning *x=a* nuqtadagi (yoki **x->a** dagi) **limiti** deb ataladi.

Bu ta‘rifga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. *b* son /(x) funksiyaning*x=a* nuqtadagi limiti bo’lganda *(a-b, a + b)* intervaldagi barcha*x* lar uchun /(x) funksiyaning qiymatlari *(b-£,b + s)* intervaida yotadi.

Keltirilgan uchinchi va to’rtinchi ta‘riflarni teng kuchliligini ko’rsatish mumkin.

10-misol. lim^r—- 2 ekanini tarifdan foydalanib isbotlang.
*-*5 x' - 5x

Yechish. *f(x)~—,*-------- -- funksiyani л-5 nuqtaning biror atrofida, masalan
x" - 5x
(4,6) intervaida qaraylik. Ixtiyoriy *£>0* sonni olib |/(x)-6|<£ ni x*5 deb quyidagicha o’zgartiramiz:

$$lx^2-25\ J\ l(x-5)(x+5)\qquad jx+5$$
$$|x^2-5x\ J\ |\qquad x(x-5)\qquad I\ *$$

x>4 ekanini hisobga olsak |x|=x>4 bo’lib $\left|\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}-2\right|$ 5-x ~ kelib chiqadi. Bundan ko’rinib turibdiki, 5 = 4e deb olsak, u holda 0<|x-5|<J tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x c (4; 6) uchun

$$|-x^3—25$$
$$|x^2 - 5x\ I\ 4$$

tengsizlik bajariladi. Bundan 2 soni /(x)=^—~5 funksiyaning x-5 nuqtadagi
x' - 5x
limiti bo’lishi kelib chiqadi.

5- ta‘rif. Istalgancha katta A7>0 son uchun shunday *b = S(M) >* 0 son mavjud bo’lib, | x-*a* |<г> tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha *a* dan farqli *x* lar uchun | f(x)|>A/ tengsizlik bajarilsa, x-><? da /(x) funksiya cheksizlikka intiladi deb aytiladi va bu lim*J* (x) - kabi yoziladi.

11- misol. lim—ekani isbotlansin.
.,-,2 т _ 2

Yechish. /(x)=— funksiyani qaraylik. Ixtiyoriy A/>0 sonni olsak, v - 2
$l/(x)|=\dfrac{1}{x-2}$ |>Л/ tengsizlik |x-2|<-^- bo’lganda bajarilishi ko’rinib turibdi. Agar

— deb olinsa, lx-2l<£ tengsizlikni qanoatlantiradiaan barcha x lar uchun /V/ I
i —

>*M* tengsizlik bajariladi. Bu esa

—Ц>—=A7 yoki
|x — 21 *8*

$\left|\frac{1}{x-2}\right|$ funksiya cheksizlikka intilishini bildiradi, ya‘ni lim --= да.
v-»2x-2

da /(x)=..L_
x~2

16.5. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti

6- ta‘rif. Agar /(*) funksiya *x* ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo’lib, istalgan £>0 son uchun shunday *N>0* son mavjud bo’lib, U-|>/v tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun |/(x) -< *E* tengsizlik bajarilsa o’zgarmas *b* son y = /(x) funksiyaning x->да dagi **limiti** deb ataladi va bu lim/(x) = *b* kabi yoziladi.

ekani isbotlansin.

12-misol. lim-^—= 1

Yechish. *f(x)*= —- funksiyani qaraylik. Istalgan *E* > 0 sonni olsak
x

$\left|f(x)-b\right|=\left|\frac{x+1}{x}-1\right|=\left|\frac{x+1-x}{x}\right|$ = *E* tengsizlik o’rinli bo’ladi. Bundan 1 soni f(x)=;—-- funksiyaning X x->да dagi limiti bo’lishi ayon bo’ladi.

$\left|\frac{x+1}{x}-1\right|<\frac{1}{N}$ bo’lib *N'* = — desak, barcha |x|>W uchun *s*

7- ta‘rif. Agar /(x) funksiya x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo’lib, istalgan yetarlicha katta A7>0 son uchun shunday /V>0 son topilsaki, |x[>A^ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun |/(x)|>ЛУ tengsizlik bajarilsa, .v = /(x) funksiya X-A да da cheksizlikka intiladi deyiladi va lim/(x) = «> kabi yoziladi.

13- misol. limx^2=<» ekani isbotlansin.

Yechish. /(x)=x^2 funksiyani qaraylik. Istalgan ,M>0 sonni olib /(x)|>A/ tengsizlikni tuzamiz. x^2*>M,* bundan |X|>VA7 kelib chiqadi. /V - VAY deb olinsa, |.\j>/V tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun x'> A"' Л/tengsizlik bajariladi. Bu limx^2 -да ekanini bildiradi.

16.6. Limitga ega funksiyaning chegaralanganligi

16.3- **teorema.** Agar *fix}* funksiyaning *a* nuqtadagi limiti *h* chekli son bo Isa. u holda y=/(x) funksiya *a* nuqtaning biror atrofida chegaralangandir.

Isboti. lim /'(x) = /> chekli son bo’lsin. U holda limitni ta'rifiga binoan istalgan £>0 son uchun shunday <■>>() son topilib *(a-8. a+ 8* I intervaldagi barcha v 'al uchun |/(.v)-*b*\ < *£* yoki [/(x)|-jZ>| <|/(л) -t, bundan i./'(-')j ; M + i: bo 1Ы11 kelib chiqadi. Agar *M* =|dj + f deb olinsa *a* nuqtaning e>-atrofidagi barcha A 'AL uchun |/'(x)| < Л-/ tengsizlik bajariladi. Bu /(x)funksiya *(a-8,a * 8)* intervalda chegaralanganligini ko’rsatadi.

Agar *Дх)* funksiya biror intervalda chegaralangan va nolga teng bo’lmasa, u holda —— funksiya ham shu intervalda chegaralangan bo’lishini ta‘kidlab *Дх)* o’tamiz.

16.7. Bir tomonlama limitlar

8- ta‘rif. Agar /(x) funksiyaning *x=a* nuqtadagi limitining ta‘rifida *x* o’zgaruvchi *a* dan kichik bo’lganicha qolsa, u holda funksiyaning shu nuqtadagi *b* limiti uning *x-a* nuqtadagi (yoki x->o-0 dagi) **chap tomonlama limiti** deb ataladi va *b,* = lim*Дх),* yoki *b,* = lim *Дх),* yoki *b,* = *Да-О)* kabi yoziladi.

Л-+Л -V -♦</-<)

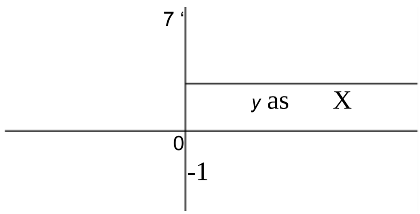
Agar <7=0 bo’lsa, u holda 6, = lim /(x)=/(-0) kabi yoziladi.

9- ta‘rif. Agar /(x) funksiyaning *x-a* nuqtadagi limiti ta‘rifida x o’zgaruvchi *a* dan katta bo’lganicha qolsa, u holda funksiyaning shu nuqtadagi *b,* limiti uning *x-a* nuqtadagi (yoki *x* ->гН0 dagi) **o’ng tomonlama limiti** deb ataladi va 6,-lim/(x) yoki *b,* = lim /(x),yoki *b,* =/(a + 0) kabi yoziladi.

X-WI * X-*П+()

Agar *a=0* bo’lsa, u holda *b,* = lim /(x)=/(+0) kabi yoziladi.

/(x) funksiyaning *x-a* nuqtadagi chap va o’ng tomonlama limitlari **bir tomonlama limitlar** deb ataladi. *ЬдЬ,* bo’lsa, u holda /(x) funksiya x=a nuqtada limitga ega. Aksincha, /(x) funksiyaning *a* nuqtadagi bir tomonlama limitlari mavjud va ular teng, ya‘ni /(<7-0)=/(a + 0)



86-chizma.

bo’lganda va faqat shundagina bu funksiya *a* nuqtada limitga ega bo’ladi. Masalan,

$$/(x) = szg/rx = \bullet \begin{cases} 1, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa. \\ 0. & agar \; x - 0 \quad bo'\,Isa, \\ -1, & agar \quad x<0 \quad bo'\,Isa \end{cases}$$

funksiya *x=a* nuqtada limitga ega emas, chunki /(-0)=-l, /(+0) = l va /(-0) z /(+0) (86-chizma). Bu funksiya 0 dan farqli istalgan nuqtada limitga ega.

16.8. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar

10- ta‘rif. Agar lim/(x) = 0 (yoki lim/(x) = 0) bo'lsa, *Дх)* funksiya x ->ada (yoki x ->ooda) **cheksiz kichik funksiya** deyiladi.

Cheksiz kichik funksiya x-v/ nuqtada chekli 0 limitga ega bo’lgani uchun u shu nuqtaning qandaydir atrofida doimo chegaralangan bo’ladi.

11- ta‘rif. Agar lim/(x) = <» (yoki lim/(x) = <») bo’lsa, *Дх)* funksiya x -»rzda (yoki x -><»da) **cheksiz katta funksiya** deyiladi.

Cheksiz katta funksiya qaralayotgan x=a nuqtaning atrofida chegaralanmagan bo’ladi.

Endi cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar orasidagi bog’lanishni ifodalovchi teorema bilan tanishamiz.

16.4- teorema. 1. Agar /(x) funksiya *x-+a* da (yoki x->ooda) cheksiz kichik funksiya bo’lsa, u holda —— funksiva x-><? da (yoki x->coda) cheksiz /(*)
katta funksiya bo’ladi.

2. Agar funksiya *x-+a* da (yoki x->oo da) cheksiz katta funksiya bo’lsa, u holda —— funksiya x da (yoki x->a> da) cheksiz kichik funksiya «?(*)
bo’ladi.

Isboti. 1. lim/(x) = 0 bo’lsin. U holda cheksiz kichik funksiyaning ta‘rifiga

ko’ra istalgan f>0 son uchun shunday £>0 son topilib, 0<|x-aj<£ shartni qanoatlantiradigan barcha *x* lar uchun |/(x)|<r tengsizlik bajariladi. Bundan Illi 1
------ >— bo’lishi kelib chiqadi, — =*M* deb belgilasak
|/(x)| £ £ ----->A7 bo’ladi. Bu esa
/(x)
lim—= =o ekanini, ya‘ni /(x) funksiya x -> *a* da cheksiz katta
funksiya ekanini /(x)
bildiradi. x -»oo bo’lgan hoi ham shunga o’xshash isbotlanadi.

2. lim^(x) = co bo’lsin. U holda cheksiz katta funksiyaning ta‘rifiga binoan istalgan Л7>0 son uchun shunday <5>0 son topilib, 0<|x-aj<b* tengsizlikni
qanoatlantiradigan barcha *x* lar uchun |^(x)| > *M*
tengsizlik bajariladi. Bundan $\left|\frac{1}{\varphi(x)}\right|$ bo’ladi. Bu esa *x->a* da
i^(x)i Л7 kelib chiqadi, --deb belgilasak
Л7

——-- >0 ni, ya‘ni lim ——-*Q* ekanini bildiradi. x-><» bo’lgan hoi ham shunga
$?(x) <p(x) o’xshash isbotlanadi. Bu teoremaga binoan limx = 0 bo’lgani
uchun ekanligi kelib chiqadi. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$

16.9. Cheksiz kichik funksiyalarning asosiy xossalari

1- xossa. Chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalarning algebraik yig’indisi ham cheksiz kichik funksiya bo’ladi.

Isboti. Ikkita qo’shiluvehi bo’lgan holni qaraymiz. a(x) va /?(.v) x ->« da cheksiz kichik funksiyalar bo’lganda, ularning yig’indisi z/(x)ˉ<x(x) : />(.') ham cheksiz kichik funksiya bo’lishini ko’rsatamiz. a(x) *x-+a* da cheksiz kichik funksiya bo’lgani uchun *c>Q* son uchun shunday <5, >0 son topilib, 0<|x--*a '<5,*

shartni qanoatlantiruvchi barcha*x* lar uchun |a(x)|<-^ tengsizlik bajariladi.

//(x) ham cheksiz kichik funksiya bo’lganligi sababli yana o’sha t-> 0 son uchun shunday <5, > 0 son topilib, 0<|x-al<5, shartni qanoatlantiruvchi barcha л lar uchun |/?(x)|< -| tengsizlik bajariladi.

<5, va £,sonlarning kichigini <5 deb belgilasak, u holda 0 < |x - al < *3* tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha *x* lar uchun |a(x)|<| va |/?(x)|<-| tengsizliklar bajariladi.

Demak, *a* nuqtaning biror J-atrofi uchun

|п(x)H «(x) + *P(x)*i 1 a(x)| +i Xᵛ)l< 2 ⁺f ⁼ tengsizlik to’g’ri bo’ladi. Bundan x -> *a* da zz(x) cheksiz kichik funksiya bo’lishi kelib chiqadi, ya'ni lim»(x) = 0. Xossa isbot bo’ldi.

2- xossa. Cheksiz kichik funksiyaning chegaralangan funksiyaga ko'paytmasi ham cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Isboti. x->a da cr(x) cheksiz kichik funksiya z(.r) chegaralangan funksiya bo'lganda, z/(x)-a(x) z(x) funksiya ham cheksiz kichik funksiya bo'lishini isbotlaymiz. x->a da z(x) chegaralangan funksiya bo'lgani sababli biror A7>0 son uchun shunday dj>0 son topiladiki, 0<|x-a|< <5, tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha *x* lar uchun |z(x)| < *M* tengsizlik bajariladi.

x -> a da a(x) cheksiz kichik funksiya bo'lganligi sababli istalgan *E* > 0 son uchun shunday *3*, >0 son topilib, 0<|x-a|<£, shartni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun la(x)j<-— tengsizlik bajariladi.

M

3_t va 3_2 sonlarning kichigini *3* deb belgilasak, u holda 0<|x-aj<£ shartni qanoatlantiradigan barcha *x* lar uchun iz(x)| < Л7 va |«(x)|<—- tengsizliklar bajariladi. Demak, *a* nuqtaning biror *3* -atrofidagi barcha x lar uchun

|zz(x)|-|a(x) z(x)|-|a(x)| |z(x)|<—--Л/--f

Л7

tengsizlik to'g'ri bo'ladi. Bundan x ->a da zz(x) cheksiz kichik funksiya bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni linw(x) = lim<z(x)z(x) = 0.

3- xossa. Chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalarning ko'paytmasi ham cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Isboti. Ikkita ko'paytuvchi bo'lgan holni qaraymiz. x—>a da «(x) va /?(x) cheksiz kichik funksiyalar bo'lsin, Cheksiz kichik funksiya chegaralanganligi sababli z/(.v}:'<z(.v)/?(x) ko'paytmada funksiyalardan biri chegaralangan funksiya, ikkinchisi esa cheksiz kichik funksiya bo'lib ikkinchi xossaga binoan ularning ko'paytmasi ham cheksiz kichik funksiya bo'ladi, ya'ni

Mm *n(* v) = lim n'(x) • r(v) - 0 bo'ladi.

4- xossa. Cheksiz kichik funksiyani noldan farqli limitga ega bo'lgan funksiyaga bo'linmasi ham cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Isboti. x -><7 da <z(x) cheksiz kichik funksiya, -(x) esa 0 dan farqli limitga ega bo'lgan funksiya bo'lsin. Biroq limitga ega bo'lgan z(x) funksiya chegaralangan. Shu sababli — *- funksiya ham chegaralanmagan. ---~ = cz(x)-— z(x) z(x) z(x) bo'linmani cheksiz kichik funksiyani chegaralangan funksiyaga ko'paytmasi sifatida qarash mumkin. U holda 2-xossaga binoan ~~ bo'iinma ham *x-+a* cheksiz kichik funksiya bo'ladi, ya'ni lim—- = 0.

•'■>o ,(x)

16.5-teorema. 1. Agar *y=f(x)* funksiya .v-»a da chekli *b* limitga c°a bo'lsa, u holda uni *b* son va *x->a* da cheksiz kichik funksiyaning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin.

2. Agary=/(x) funksiyani o'zgarmas *b* son bilan *x-+a* da cheksiz kichik funksiyaning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, u holda *b* son bu funksiyaning x >*a* dagi limiti bo'ladi.

Isboti. 1. Iim/(x) = 6 bo'lsin, u holda limitni ta'rifiga binoan istalgan *c* > o son uchun shunday <J>0 son mavjud bo'lib, 0<|x-a|<d' shartni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun |/(x)-d|<£ tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlik *J\x}-b* funksiya *x-^a* da cheksiz kichik funksiya ekanligini bildiradi. Uni tz(x) orqali belgilasak /(x)-6=a(x) yoki *f(x)~b+ a(x)* kelib chiqadi, bu yerda *a(x) x->a* da cheksiz kichik funksiya.

2. *J\x)~b+a(x)* bo'lsin, bu yerda /2-0'zgarmas son, a(x) esa x->a da cheksiz kichik funksiya. U holda cheksiz kichik funksiyani ta'rifiga binoan istalgan r>0 son uchun shunday <5> 0 son mavjud bo'lib, 0<|x-a| <∂' shartni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun |«(x)| < *s* yoki |/(x)-Z>|<£ tengsizlik bajariladi, chunki a(x)=/(x)-6. Bu *x-*a* da /(x) funksiya *b* limitga ega ekanligini bildiradi, ya'ni lim/(x) = *b*.

Izoh. Keltirilgan barcha xossalar hamda 16.5-teorema x -><» da ham o'rinli.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1 a) (xJ=|y|b) (X»}=ЫI d) Ю e|,+(-1)"y| ketma-ketliklarning monotonligi va chegaralanganligi haqida nima deyish mumkin? Javob. a) Monoton kamayuvchi va chegaralangan. b) Monoton o'suvchi va quyidan chegaralangan. d) Monoton emas, chegaralangan.

2. Limitningta'rifidan foydalanib quyidagidar isbotlansin: ajlim-^ -0;

b) liml 1 + -^- 1 = 1; d) lim-— = 1.
" -Ц *2n* +1J " - *n* + 4

3. [vj- {(-1)"} ketma-ketlikning limitga ega cmasligini ko'rsating.

v^2 - 9 ■ •
4. Iim: --- = 6 ekanligini isbotlang. 5. hm(3x-2)=4 ekanligini isbotlang.
'->л x-3 1,2

5. /(x)-sin — funksiya x-0 nuqtada limitga ega emasligini ko'rsating.

Ko'rsatma. Argument x ning 0 ga yaqinlashadigan ikkita {x,,}={—va («л-J

(x } = —-— !> ketma-ketliklarga mos funksiyaning qivmatlari ketma-ketliklari [(4и- 3)тг] {/(x,,)} va {/(*,,)} har xil limitlarga ega ekanligini isbotlang.

6. /(x)--(x-3)^2 funksiya x->3 da cheksiz kichik funksiya ekanligini ko'rsating.

7. /(x) = —— funksiya x->4 da cheksiz katta funksiya ekanligini ko'rsating.
4-x

8. /(x) =—1— funksiya x->-2 da cheksiz katta funksiya ekanligini
(x + 2)-
ko'rsating.

$$\textbf{10.}\ f(x)=\begin{cases}0, & agar\ x<0\ bo'lsa,\\ x^2+1, & agar\ 0<x<1\ bo'lsa,\\ 3, & agar\ x>1\ bo'lsa.\end{cases}$$

9. /(x) = 3x + 2 funksiya x->« da cheksiz katta funksiya ekanligini ko'rsating.

funksiyaning x=0 va x=l nuqtalardagi bir tomonlama limitlari topilsin. Javob: /(-0) = 0, /(+0) = l, /(1-0) = 2, /(l + 0) = 3.

11. 1) 2) 3) {2/7 — 1} 4) {(-1)" +1) ketma-ketliklardan monoton o'suvchi va chegaralanganlarini ko'rsating.

A)l;2 B)2;3 D) 3;4 E) 1 ;3 F) 2;4.

12. 1) |y~yj 2) 3) J ketma-ketliklardan monoton kamayuvehi va chegaralanganlarini ko'rsating.

A)l;2;3 B)l;2;4 D) 1;3;4 E) 2;3;4 F) barchasi.

13. lim——1— topilsin.
v

A) 2 B) 3 D) I E) 4 F) mavjud emas.

14. lim COAX topilsin.

A
1

A) 2 B)--- D) 0 E) - F) mavjud emas. J

Л
-y

15. lim - --.T topilsin.

•■(2 v)’

Л) B) D) 0 E) ~ F) mavjud emas.

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

l.Sonli ketma-ketlik nima? Qachon u chegaralangan va qaehon monoton deyiladi?

2.Ketma-ketlikning limiti nima? Ta‘rifni tengsizlik yordamida bering va uni geometrik ma’nosini tushuntiring.

3. Monoton chegaralangan ketma-ketlik limitining mavjudligi haqidagi teoremalarni ayting.
4. Funksiyaning nuqtadagi limiti nima?
5. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti nima?
6. Limitga ega bo’lgan funksiyaning chegaralanganligi haqidagi teoremani ayting
7. Bir tomonlama limitlar nima? Funksiyaning nuqtadagi limiti va bir tomonlama limitlari orasida qanday bog’lanish bor?
8. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalarni ta‘riflang? *x- a* va x-><» da cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalarga misollar keltiring.
9. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar orasida qanday bog’lanish bor?
10. Cheksiz katta funksiya chegaralangan bo’lishi mumkinmi?
11 .Cheksiz kichik funksiya chegaralanmagan bo’lishi mumkinmi?
12. Cheksiz kichik funksiyalarning asosiy xossalarini ayting.
13. Aniqlanish sohasining hech bir nuqtasida limitga ega bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.

17- ma‘ruza. Mavzu: Limitlar haqida asosiy teoremalar. Ajoyib limitlar. Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash

Reja:
1. Limitlar haqida asosiy teoremalar.
2. Birinchi ajoyib limit.
3. Ikkinchi ajoyib limit.
4. Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash.

Adabiyotlar: 1,2,4,5,9,10,11,13,14,15.

Tayanch iboralar: cheksiz kichik, ajoyib limitlar, bir xil tartibli, yuqori tartibli hamda ekvivalcnt cheksiz kichik funksiyalar.

17.1. Limitlar haqida asosiy teoremalar

Funksiyalarning limitlarini topishga yordam beradigan limitga o’tishning eng sodda qoidalari bilan tanishamiz.

Bunda isbot faqatgina. x->a hoi uchun o’tkaziladi (x->co da shunga o’xshash isbotlanadi). Ba‘zan qisqalik uchun, x--»o ni ham, x->«> ni ham yozmaymiz.

17.1- teorema. Chekli sondagi limitga ega funksiyalar algebraik yig’indisining limiti qo’shiluvchi funksiyalar limitlarining algebraik vig’indisiga teng, ya‘ni

$$+ n,(x) + ... + «,_{(}(x)) = linu/j(x) + liinu_2(x) + ... + liinw/x)$$

Isboti. Mulohazani ikkita qo’shiluvchi bo’lgan hoi uchun yuritamiz. limz/gx) = *a,* limzF(x) = bo’lsin. U holda lini(n,(x) +w,(x)) = n + 6 tenglik to’g ti bo’lishini ko’rsatamiz. Cheksiz kichik funksiyalarning xossalaridagi 16.5- teoremaning birinchi qismiga asosan *u =a + a, u,=b + /3* deb yozishimiz mumkin, bu yerdagi *a, fl-* cheksiz kichik funksiyalar.

Demak, w, + u_2 = (a + a)+(Z> + /?) = *(a + b)+(a + p* Bu tengiikda a+/?-o'zgarmas son, a+/?-cheksiz kichik funksiya. Yana o'sha 16.5-teoremaning ikkinchi qismini qo'llasak limtW]+$м_2$) = a + Z> = limw,+ limw_2 ekanligi kelib chiqadi.

x^— 4 (r —2)(x + 2)
1- misol. lim----------= lim- ---------------= lim(x + 2) = linu + lim2 = 2 + 2 = 4.
r-2 x_2 x-2 x-2 *-2 '-2 x-*2

2- misol. lim——= limf —т - —т-| = limf 1 - = liml - limД- = 1 -0 = 1.
x '-"ух *x J* *x~ J* T~>oo Jr_*"x^2

17.2- **teorema.** Chekli sondagi limitga ega funksiyalar ko'paytmasining limiti shu funksiyalar limitiarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

1 im(w, (x) • w_2 (x) •... • w„ (x)) = lim u, (x) • limw, (x) •... • lim ыя(x)

Isboti. Ko'paytmada ikkita funksiya bo'lgan holni qaraymiz. limM)=a, lim«$_2$ = 6 bo'lsin. U holda yuqorida eslatilgan 16.5-teoremaga binoan *u_t=a + a, u,=b + p* bo'ladi, a, p-cheksiz kichik funksiyalar. Demak, и, и, = (a + a) (6+ /?) = *ab + (ab + ap + aft).* Bu tenglikdagi *ab-6'*zgarmas son, *(ab+ap+ap)*- cheksiz kichik funksiya. Yana o'sha 16.5-teoremani ikkinchi qismini qo'llasak limu,u_2 =a/> = lim«,limw_2 ekanligi kelib chiqadi.

3- misol. lim(x + 3)(x-4) = lim(x + 3)lim(x-4) = [Iimx + lim3]-[limx-lim4] = = (2 + 3)(2-4) = 5(-2) =-10.

4- misol. limf 1 - — |2 - Д-1 = Hmf 1 - - j limf 2 - | = (1 - 0)(2 + 0) = 2 .
'-*4 *x x')* x/'-»»v x)

Natija. O'zgarmas *C* ko'paytuvchini limit belgisidan chiqarish mumkin, ya'ni lim *C* • u(x) = *C* lim w(x) chunki limC=C.

5- misol. lim 7x^2 = 7 lim x^2 = 7-(-J)^2 = 7 .
Л-+-1 Y_>_j

17.3- **teorema.** Ikkita limitga ega funksiya bo'linmasining limiti maxrajning limiti noldan farqli bo'lganda, shu funksiyalar limitiarining bo'linmasiga teng, ya'ni agar limv * 0 bo'lsa, lim-=—- bo'ladi.

v limv

Isboti. lim z/(x)=a, limv(x)=b#0 bo'lsin. U holda *u = a + a, v = b + p* bo'lishini hisobga olsak

u_a + a_a *(a + a* *a* j _ *a* *ab + ab-ab-ap* _ *a* *ab-aP*
v *b + p b* f& + /7 *bj b* *b(b + P)* *b* *b(b+ P)*

tenglikka ega bo'lamiz, bunda^-o'zgarmas son, ——— - cheksiz kichik *b(b + p)*

funksiya, chunki *ab - up* cheksiz kichik funksiya va *b(b + p)#).*

So'nggi tenglikka 16.5-teoremani 2-qismini qo'llasak Iim-= — =—- v *b* limv tenglik hosil bo'ladi.

6-misol. lim—— ni toping.
*-»2 3x +1

Yechish. lim(3x + 1) = 32 + 1 = 7*0. Shuning uchun:

г 2лı h 3 - утм (2x + 3) 2ı2 + 3 _ 7
тм3x+1 lim (3x + 1) ~ 3-2 + 1 7 ”

7- **misoL** Игп^Д-- ni toping.

Yechish. lim(x-3) = 3-3 = 0 bo’lgani uchun 17.3-teoremani qo’llab

bo’lmaydi. Suratning limiti lim(x + l) = 3 + 1 = 4 * 0 bo’lgani uchun berilgan

ifodaning teskarisining limitini topamiz: lim x-3 / x +1 lim(x-3) 3_3 Q / lim(x+l) 3+1 4 .v->3

Bundan lim^ii-oo kelib chiqadi, chunki cheksiz kichik funksiyaga teskari x-3 funksiya cheksiz katta funksiya bo’ladi.

17.4- **teorema.** Agar *a* nuqtaning biror atrofiga tegishli barcha *x* lar uchun _y=/(x)>0 va lim/(x) = Z> (b-chekli son) bo’lsa, u holda *b>Q* bo’ladi.

Isboti. Teskarisini faraz qilamiz, ya‘ni lim/(x) = /> bo’lib b<0 bo’lsin.

U holda |/(x)-6|>IZ?[>0 bo’lishi ravshan. Oxirgi tengsizlik *J(x)-b* ayirmaning nolga intilmasligini, ya‘ni *b* son Дx) funksiyaning *x->a* dagi limiti emasligini ko’rsatadi. Bu teoremaning shartiga zid, binobarin *b<Q* degan faraz shu ziddiyatga olib kcldi. Demak, *fix)>* 0 bo’lsa lim/(x)>0 bo’larekan.

Shunga o’xshash limitga ega /(x)<0 funksiya uchun lim/(x)<0 bo’lishini isbotlash mumkin.

Boshqacha aytganda nomanfiy funksiya limitga ega bo’lsa uning limiti manfiy son bo’laolmas ekan va nomusbat funksiya limitga ega bo’lsa uning limiti musbat son bo’laolmas ekan.

17.5- **teorema.** Agar x -> *a* da limitga ega /j(x) va /,(.r) funksiyaning mos qiymatlari uchun Д(x) > /,(x) tengsizlik bajarilsa, u holda lim Д(x) 2-. lim /,(x) bo’ladi.

Isboti. Shartga ko’ra Д(x)>$/_2$(x), bundan Д(x)-Д(x)>0. Oldingi teoremaga binoan lim [$/_I$(x)-/,(x)]>0 yoki lim /(x)-lim /,(x) >0. Bundan lim /j(x) > lim /Дx) tengsizlik kelib chiqadi. Teorema isbot bo’ldi. Bu teoremaga ko’ra lengsizlikda limitga utish mumkin ekan.

17.6- **teorema** (oraliq funksiyaning limiti haqida). Agar ?/(x), v(x) va S(A) funksiyalarning mos qiymatlari uchun ?/(x)< v(x)< Дx) tengsizliklar bajarilsa va lim//(x)= lim Дx)=Ь bo’lsa, u holda lim v(x)=b bo’ladi.

Isboti. Shartga ko’ra limz/(x)=b va limДx)-Ь, demak istalgan £>0 son uchun *a* nuqtaning Д-atrofi mavjudki, undagi barcha x lar uchun |n(x) *b\<£* tengsizlik bajariladi. Shunga o’xshash shu *£>Q* son uchun *a* ning Д-atrofi mavjud bo’lib undagi barcha x lar uchun |a(x)-Z>|<£ tengsizlik bajariladi. Agar orqali 8_t va J, sonlarning kichigini belgilasak *a* nuqtaning -atrofidagi barcha *x* lar uchun *\u(x)-b\<£* va | z(x)~*b* |<f tengsizlik bajariladi. Bular

$$-e < u(x)-b < s \text{ va } -£<z(x)-b<£ \qquad (17.1)$$

tengsizliklarga teng kuchli.

Endi teorema shartidagi *u(x)<v(x)<z(x)* tengsizliklarni unga teng kuchli м(x)-A <v(x)-b< z(x)-/> tengsiz.liklar bilan almashtiramiz (barchasidan bir xil *b* son ayirildi).

Bunga (17.1) tengsizliklarni qo'llasak -*E <u(x)-b <v(x)-b< z(x)-b<* *£* yoki bundan *£<v(x)-b* < *£* tengsizlikka ega bo'lamiz. Shunday qilib *a* nuqtaning

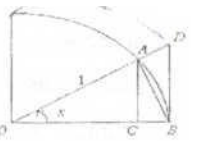
8- atrofidagi barcha x lar uchun -*s<v(x)-b <£* tengsizlik o'rinli ekan.

Bu limv(x)-6 ekanini bildiradi.
.V—

Bu teoremani hazillashib «Ikki militsioner haqidagi teorema» deb atashadi. Nima uchun shunday deb atalish ini o'ylab ko'rishni o'quvchiga havola etamiz.

8- misol. lim sinx - 0 isbotlansin.
v->0

Yechish. Radiusi 1 ga teng aylanani qaraymiz.



87-chizma.

87-chizmadan: x>0 bo'lsa ---sinx; *AC-sinx,*
OA

AB—x (markaziy burchak o'zi tiralgan yoy bilan o'lchanadi), AC<ЛЯ yoki sinx<x ekani ayon bo'ladi. x<0 bo'lganda |sinx|<|x| bo'lishi ravshan.

Shunday qilib x>0 uchun 0<sinx<x va x<0 uchun 0<lsinx

tengsizliklarga ega bo'ldik. limO=Iimx=O ekanligini hisobga olsak
17.6- x-»U .v-И)

teoremaga binoan lim sinx = 0 ekanligi kelib chiqadi.

9- misoi. lim sin- -0 isbotlansin.
v-o 2

Yechish. 0 < |sin ||<|sinxl ekani ravshan.

lim 0=lim|sinx|=0 bo'lgani uchun 17.6-teoremaga binoan lini|sin-^|= 0 yoki

lim sin-= 0 kelib chiqadi.
№♦0 2

10- misol. lim*cosx*- I ekanligi isbotlansin.

Yechish. $2\sin^2 \frac{—}{2} = 1-\cos x$ yoki *cosx* = 1 -2sin^2 - ekanligini e'tiborga olsak

lim co.vx = lim t I-2sin^2 - = I-2limsin^2—= I - 2 O^2 = I hosil bo'ladi. r_.> 2) *2*

17.2. Birinchi ajoyib limit

$\frac{\quad}{x}$ funksiya faqat x-0 nuqtada aniqlanmagan, chunki bu nuqtada

kasrning surati ham, mahraji ham 0 ga aylanib uni o'zi - ko'rinishga ega bo'ladi.

Shu funksiyaning x->0 dagi limitini topamiz. Bu limit **birinchi ajoyib limit** deb ataladi.

17.7- **teorema.** funksiya x->0 da 1 ga teng limitga ega.
X

Isboti. Radiusi 1 ga

teng aylana olib AOBintervalda yotadi deb faraz qilamiz (87-chizma).

markaziy burchakni *x* bilan belgilaymiz va u [1] 0, yj

Chizmadan ko'rinib turibdiki,

A *AOB yv.z\<AOB* sektor yuzi< A *DOB* yuzi (17.2).

Biroq, *\AOB* yuzi =^ОЛОВ-sinx = ~llsinx =-sinx (uchburchakning yuzi ikki tomoni va ular orasidagi burchak sinusi ko'paytmasining yarmiga teng). *AOB* sektor yuzi = *-OB*[1]*-AB* = —\[1] x = -x,

2 2 2

$$\Delta\, DOB \text{ yuzi} = \frac{1}{2}OB\cdot BD = \frac{1}{2}OB\cdot\frac{BD}{1} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot tgx = \frac{1}{2}tg\,x.$$

Shu sababli (17.2) tengsizliklar $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx$ ko'rinishni yoki $\frac{1}{2}$ ga

qisqartirilgandan so'ng sinx<x</gx ko'rinishni oladi. Buning barcha

hadlarini *sinx>0* ga bo'lamiz |0<x< —U holda 1<—— < —-— yoki
V 2y sinx *cosx*

, sinx
1> ----- > *cosx*
x

tengsizliklarga ega bo'lamiz. Bu tengsizliklar x>0 deb faraz qilinib chiqarildi. -"—*cos(-x)* = *cosx* ekanligini e'tiborga olib, bu tengsizliklar x<0 (~x) X
bo'lganda ham to'g'ri degan xulosaga kelamiz. Ammo liml -1 va lim *cosx* - 1.

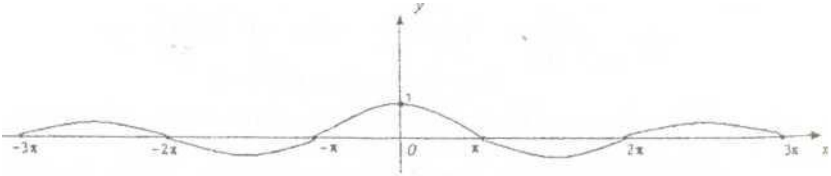
Demak, funksiya shunday ikki funksiya orasidaki, ularning ikkalasi ham bir xil 1 ga teng limitga intiladi. Shuning uchun oraliq funksiyaning limiti haqidagi 16.6-teoremaga binoan oraliqdagi funksiya ham ana shu 1 limitga

x

intiladi, ya'ni

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1.$$

y = funksiyaning grafigi 88-chizmada tasvirlangan.



88-chizma.

sin X

11-misol. lim £ £ = lim «£x=|im sin x 1 -lim ------ Inn--------- 1 •- = 1.
X '->0 X Jr_>0 X cosx •'->0 x '-*u cosx 1 sinx 1 1 .

12-misol. lim sin/их -------- — — lull •o m ---mx- -wlim--------- -I-/?/ (///-o zgarmas son).
r-»l> x' sin/их sin/их , . , s

x-»0 fnx

13-misol. lim sin ax — lim sin *a* x / X / sin *fix* / *X* lim sin a x / y-»» *x*_. = ^_ sin/A /?'
v—>0 sin *fix*

17.3. Ikkinchi ajoyib limit

Ushbu $\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ sonli ketma-ketlikni qaraymiz, bunda/7-natural son.

17.8- **teorema.** Umumiy hadi x,,=^l + — j bo'lgan kctma-ketlik и->a> da 2 bilan 3 orasida yotadigan limitga ega.

Isboti. Nyuton binomi formulasi

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n}b^n$$

dan foydalanib ketma-ketlikni x,, va x,,+I hadlarini quyidagi ko'rinishda yozamiz: (i+1Y =

]+^.l+lfcJ>.QY ^("-!)(»-2)QY+ +

\ n) 1/7 Г 2 y/7 J Г2-3 \n)

(17.4)

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{1\text{-}2\text{-}3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+$$

$$\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

v,, bilan x,,., ni taqqoslasak. x,,rI had x,, haddan bitta musbat qo'shiluvchiga ortiqligini ko'ramiz.

$1-\frac{k}{n+1} > 1-\frac{k}{n}$ (A - 1.2.3....И -1) bo'tgani uchun uchinchi haddan boshlab x,14l dagi har bir qo'shiluvchi x, dagi unga mos qo'shiluvchidan katta. Demak, istalgan /7 uchun xJ(+l>x,, va umumiy hadi x,,=fl+— j bo'lgan ketma-ketlik monoton o'suvchi.

Endi berilgan ketma-ketlikm chegaralanganligini ko'rsatamiz kw ¹ᵃ¹§an £=1,2,3,... uchun !--<! ekanini hisobga olib (17.4) formuladan

ил
к "7
, 1 1 1
tengsizlikni hosil qilamiz. <14-14 — 4----------------4... 4
1-2 1-2-3 1-2-3-...-л

c , 111 1
So ngra------- ---------------------<-r,
1-2-3 2² 12-3 4 2ʲ
ekanligini ta'kidlab tengsizlikni
HP[1]
x,

ko'rinishda yozamiz. Qavsga olingan yig'indi birinchi hadi a=l va maxraji <y=l bo'lgan geometrik progressiyaning hadlari yig'indisini ifodalanganligi cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning hadlari yig'indisini formulasi ga asosan x,,=fl+-| ' 2 uchun topish

l-<? к *n)* <1+-Ц- = 1 + 2 = 3
1-1
2

tengsizlikka ega bo'lamiz. Ketma-ketlik monoton o'suvchi bo'lganligi uning sababli birinchi hadi x, = ^1 + -I
I
= 2 uning qolgan barcha hadlaridan kichik bo'ladi.

Demak, barcha *n* uchun <3 o'rinli, ya'ni umumiy hadi

x - i +11 bo'lgan ketma-ketlik monoton o'suvchi va chegaralangan. Shu sababli к ")
u monoton chegaralangan ketma-ketlikning limiti mavjudligi haqidagi 16.1- teorcmaga ko'ra chekli limitga ega. Bu limitni *e* harfi bilan belgilaymiz, ya'ni

< i Y
lim 14 — - e .
"" 4 *nJ*

e-irratsional son. Keyinroq uni istalgan darajada aniqlik bilan hisoblash usuli ko'rsatiladi.e = 2,7182818284...

17.9- teorema. fl + funksiya x->oo da e songa teng limitga ega:
к -v;

Iimfl+0 = e (17.5).
'->4 *x)*

Isboti. I) v > -r deylik. U holda /? < ,v < *n* i 1; — > 1 > - - •,
n X II +1

1 + 1> 1 + 1 > 1 + -1—, i I a---1 >'141] > I 14—1 bo'ladi. Agar x -> +«>, 11
П X /7 + 1 *nJ < x) к Л + 1Л*

holda/7 —>co va limi 14-1^ > lim 11 4-11 >limfl4—-—| yoki
-4 *nJ* xj к n + lj

| > lim fl+ 1) >liinil+—-—1
1 Xj n + lj

(1V
>e\ bundan lim 1+ — -e kelib chiqadi.
x)

lik. Yangi r~-(x+l) yoki x--(/+l) o’zgaruvchini kiritamiz'-

■+i

= e ekanini isbotladik. Bu limit **ikkinchi ajoyib**
x J

limit deb yuritiladi.

Agar bu tenglikda ~ = *a* deb faraz qilinsa, u holda *x* -+ co da *a* -> 0 (a * 0) va x

lim (1 + *a\? = e* tenglikni hosil qilamiz. Bu ikkinchi

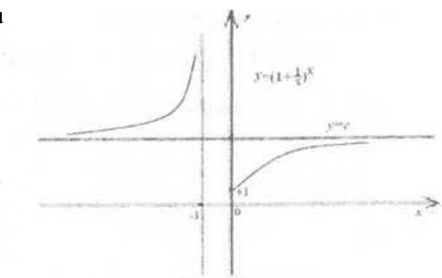
ajoyib limitning yana bir ko’rinishi. *У* =fj 4-11 funksivaning grafigi 89-chizmada tasvirlangan.

\ x)

Chizmadan ko’inib turibdiki bu funksiya (-1,0) intervaida aniqlanmagan, ya‘ni 1 + 1 <0, chunki
x

1 +1 = —- va x +1 > 0, x < 0.

x x **Izoh.** Asosi *e* bo’lgan ko’ursatkichli funksiya eksponental $y = e^x$ funksiya deb ataladi. Bu funksiya mexanikada(tebranishlar nazariyasida), elektrotexnikada va radiotexnikada,



89-chizma.

radioximiyada va hokazolarda turii hodisalarni o’rganishda katta rol o’ynaydi.

Izoh. Asosi e = 2.7182818284... sondan iborat logarifmlar natural logarifmlar yoki Neper logarifmlari deb ataladi va *t!og$_e$x* o’rniga *tux* deb yoziladi. Bir asosdan ikkinchi asosga o’tish formulasi *(og,,b*- —[1] dan

Co.c.и

foydalanib o’nli va natural logarifmlar orasida bog’lanish o’rnatish mumkin: fg x = ■ — = - — *tn x* = 0,434294 *tn x* yoki *tn x* = *tn* 10 *tg x* ~ 2.302585 *tg x* .

tn\0 tn\0

14-**misol.**

15- **misol.** lim' 1+- I topilsin.
~4 *xj*

Yechish. x=3/ desak, x->co da /-4<»va

4, +;j -йН) =

= limfl+-) Iiinfl + -1 limfl + --^ = *eee* = *e'* bo’ladi.
-4 d-4 *t)* -4 <)

/4+4Y*2 fx+i+3Y+l+l ,. f, з
16- **misol.** lim ----- =lini---------------=lmi|l+--------------
«•(x+iJ r–> 4 x+i) *’*4 -v+i

= lim^l + —=lim^l + —= eJ-l-e’.

Ikkinchi ajoyib limit Г ko’rinishdagi aniqmaslik ekanini ta‘kidlab o’tamiz.

17.4. Cheksiz kichik fynksiyalarni taqqoslash

a = a(x) va /? = /?(x) funksiya x-><? (yoki x->oo) da cheksiz kichik funksiyalar bo’lsin. Bu funksiyalarning yig’indisi, ayirmasi va ko’paytmasi ham cheksiz kichik funksiya bo’lishini ko’rdik. Ularning nisbati, ya‘ni bo’linmasi haqida gapirilmagan edi. Ikkita cheksiz kichik funksiyalarni ularning nisbatlarini limitiga qarab taqqoslanadi.

13
1- **ta‘rif.** Agar lim—= 0 (yoki lim— = oo) bo’lsa, *a* funksiya/7funksiyaga
P *a*

nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya deyiladi.

Masalan *x* ->0 da a = $\sin^2$ x funksiya *p* = *x* funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya, chunki lim$\sin^2$x = 0 , limx = 0 va
,v-»0 x-M>

$\sin^2$x sinx,. . , „
lim—-— = hm ----- lim sinx = 1 0 = 0.
x л-—0 x v-.O

2- **ta‘rif.** Agar lim = */1*0* bo’lsa, *a* va *p* funksiyalar bir xil tartibli **cheksiz kichik funksiyalar** deyiladi.

Masalan x->0 da a = sin3x va /? = x funksiyalar bir xil tartiblicheksiz kichik funksiyalardir, chunki limsin3x = 0 , limx - 0 va lim —= 3 * 0.
x-M) ,v->0 л-M) v

3- ta‘rif. Agar lim-Jj = l bo’lsa, *a* va *p* cheksiz kichik funksiyalar ekvivalent deb ataladi va *a - p* yoki *a - p* kabi yoziladi.

Masaian,x-»0 dax/wx-x, chunki lim-—— = 1 va x->0 da/gx-x, chunki lim— -- = 1. x
>-»<> Д-

Amaliyotda qo’yidagi teoremadan ko’p foydalaniladi.

17.10-teorema. Agar *a~a*$_t$, *p~p*$_{\{}$ bo’lsa, lim—= lim-- tenglik to’g’ridir.

,. . x .. a .. a a, Д ..a.. a₁₂ Д ... a a,
Haqiqatan lim— = Inn ------L— = Inn — lim —lim— = 1 • lim— 1 = Inn--.
Д a, Д Z? a, Д Д Д Д

, _ ... sinSx 5x
17--------------------- nusol. Inn = lim — = 5.
.v—♦<) д x->0 д*

18-misol. lim—— = lim—= —.
>-▶<’sin7x 0 7x 7

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

Ko’rsatilgan limitlar hisoblansin.

1. lim .v- H x+1 Javob: 4.

2. lim(3sinx-6cosx + 4crgx). Javob: 3.

3. lim ——-. Javob: 2.
№>l x — 1

4. lim-AV—. Javob: 0.
■'->3Vx + 3

5. limJ 3_1 + _1 _ 5'I. Javob: 3.
< X -Tx x’J

6. lim —Javob: 1.
x

7. lim 4x42x² + x-3 Javob. o
lx² + x- 2

8 lim l + 2+ - + ". Javob- 1/2 ’

9. lim l + 3 + 5 + ... + (2n-l)_ Javob. L
n '

10. lim-²-——-—. Javob: oo.
.v— 2x + 3

11. lim * + 2 . Javob: 0.
2x‘ + 5

12. lim—-. Javob: 12.
'r-*² x-2

x²-7x + 12
13. lim— --------- . Javob: -1.
*-»•’ x² - 5x + 6

14. lim——-. Javob: n.
,V-»I x_I

VT+x-i
15. Inn --------- . Javob: - 3
x

16. $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right]$. Javob: - I.

17. lim^—-. Javob: -- Vx 3
-1 3

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}\right.$ -1 Javob: 0.

sin3x , . 3
19. lim ----- . Javob: -.
-»—»•> 2

sill I Ox , ,
20. lim ------ . Javob: 10.
X

fg2x
sinx
21 hm ----- Javob: —.
X 7г

Vi-cosx , , V2
22. lim —---- —. Javob: —
л-0 д ?

23. lim(l-x)/?—. Javob: ² .
J[_>l 2 л-

arcsinx . , .
24. inn ------- . Javob: 1.
x

25. linii 1 + —I . Javob: e^2.
■ᵛ-’A xj

26. . Javob: - e
< I Y
111111 1—
H xj м+9

27. lim! —— | . Javob: -.
'•A,i+.v; c

28. I . Javob: *e*.

29. lim[fn(>7 +1) - Javob: 1.

30. limsin- topilsin.
x-.O v

A) 0 B) 1 D) ~ E) F) mavjud emas.

x² + 10x-39 ■
31. Inn-----, —— — topilsin.
x’ - 27

A) 11 B) — D) — E) 2 F) 9.
27 27 27

32. liml $a + x - ja - x$.
-------------- topilsin.
Π'

A) Va B)2^a D)4= E)^= F)3Va.
■\'a

33. lim J+3x-5
topilsin.
v-> 2 - 4x'

A 14 1
D) F)2 F)
4 ■ 27 27 4

34. lima f J topilsin.
< "U

A) ae;W pt B) ae"»"' D) ae u>l " E) ae"> F) ae"™1" pt

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1 .Yig'indining limiti haqidagi teorcmani ayting.

2. Ko'paytmaning limiti haqidagi tcoremani ayting.

3. Bo'linmaning limiti haqidagi teorcmani ayting.

4. Tengsizlikda limitga o'tish mumkinligi haqidagi teorcmani ayting.

5.Oraliq funksiyaning limiti haqidagi teoremani ayting.

6. = 1 formulani isbotlang.

7. Chegaralangan monoton ketma-ketlik limitining mavjudligi haqidagi teoremani ayting.

8. liml 1 +1 = e formulani isbotlang.
n

9. lim[l+-- -e formulani isbotlang.

10. e
qandayson?

11. Eksponental funksiya nima?

12. Natural logarifm nima? Natural va o'nli logarfmlar sistcmasi orasida qanday bog'lanish bor?

13. Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash nimadan iborat?

14. Qaysi holda bir cheksiz kichik funksiya ikkinchisiga nisbatan yuqoii tartibli deyiladi?

15. Qaysi holda ikkitacheksiz kichik funksiyalar bir xil tartibli deyiladi.

16. Qaysi holda ikkita cheksiz kichik funksiyalar ekvivalent deyiladi?

17. Ekvivalent cheksiz kichik funksiyalarga misoliar keitiring.

18. Limitlarni hisoblashda ekvivalent cheksiz kichik funksiyalardan qanday foydalaniladi?

19-ma‘ruza. Mavzu: Funksiyaning hosilasi, uning geometrik va mexanik ma‘nolari

Reja:

1. Hosila tushunchasiga olib keluvchi masalalar.
2. Hosilaning ta‘rifi va uning geometrik va mexanik ma’nolari.
3. Hosilaning bioiogik ma‘nosi.
4. Hosilaning iqtisodiy ma‘nosi.
5. Funksiyaning differensiallanuvchiligi.
6. Differensiallashning asosiy qoidalari.
7. Murakkab funksiyaning hosilasi.
8. Teskari funksiya va uning hosilasi.

Adabiyotiar: 1,2,4,5,9,10,11,13,14,15.

Tayanch iboralar: o’rtacha tezlik, oniy tezlik, o’rtacha zichlik, zichlik, urinma, burchak, koeffisient, hosila, differensiallash, hosilaning mexanik, geometrik, bioiogik, iqtisodiy ma‘nolari, teskari funksiya.

18.1. Argument va funksiyaning orttirmalari

y = /(,x) funksiya (a; *b)* intervalda aniqlangan bo’lsin. Bu intervaldan ixtiyoriy x,, nuqtani olamiz, unga funksiyaning $j\text{-}_0$ = $/(x_0)$ qiymati mos keladi (90-chizma). (a;Z>) intervaldan olingan argumentning boshqa x qiymatiga funksiyaning *y = f(x)* qiymati mos keladi. x-x,, ayirmax argumentning $x_{1(}$ nuqtadagi orttirmasi deyiladi va Av orqali belgilanadi.

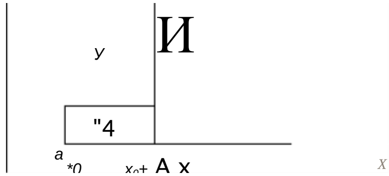
/(x)-/(x,,) ayirma /(x) funksiyaning argument orttirmasi Avga mos orttirmasi deyiladi va Av orqali belgilanadi. Shunday qilib, $Ax=x-x_u$, $Av=/(x)-/(x_{(l})$. Bundan x -- x_n + Ax, Av — $/(x_0 + Ax)$ - /(x,,).

90- chizmada *(a, b)* intervalning hech bir nuqtasida grafigi uzilmaydigan funksiya tasvirlangan. Undan ko’rinib turibdiki argumentning kichik Ax orttirmasiga funksiyaning ham kichik Av orttirmasi mos keladi. Boshqacha aytganda argument x ning bir-biriga yaqin qiymatlariga funksiyaning ham bir- biriga yaqin qiymatlari mos keladi. Bu qoida har qanday funksiya uchun ham to’g’ri kelavermaydi. Masalan, y = - funksiyani qaraylik. x ning bir-biriga ancha x
yaqin x.^-10 ^{6} va x, =10^s qiymatlariga funksiyani bir-biridan katta farq qiladigan y, = •!()' va y, =10” qiymatlari mos keladi. Boshqacha aytganda argumentning juda kichik Av = x, -x, - 2 • 10 ^{6} orttirmasiga funksiyaning ancha katta

Av = y. - v, = 2 ■ IO^6 orttirmasi mos keladi. Agar biz v = -- funksiyani grafigini (91-chizma) kuzatsak grafikning uzilishga ega (u ikki bo’lakdan iborat) ekanligini va uzilish x ning x=0 qiymatida sodir bo’lishini ko’ramiz.

Shuning uchun ham argumentning x_o=0 nuqtaga yaqin nuqtalardagi kichik orttirmasiga funksiyaning kichik orttirmasi mos kelmaydi.

Bu kabi hollar barcha funksiyalar sinfini ikkiga, ya‘ni grafigi uzilmaydigan va grafigi bir nechta qismlardan iborat funksiyalar sinfiga bo’lib o’rganishni taqozo etadi.



90-chizma.

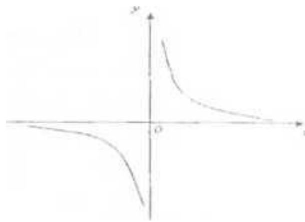
18.2. Funksiyaning nuqtada va intervaida uzluksizligi

y = f(x) funksiya x_u nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan bo’lsin.

1-ta‘rif. Iim/(x) = /(x„), (18.1)

ya‘ni funksiyaning x,, nuqtadagi limiti uning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo’lsa, y = /(x) funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

Bu ta‘rifga teng kuchli yana bir ta‘rifni keltiramiz.


hizma.

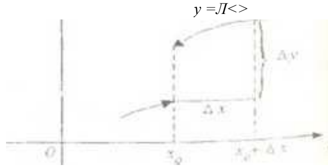
2- ta‘rif. Istalgan r>0 son uchun shunday <5 = j(«-)>0 son mavjud bo’lsaki, |x-x_0|<<5 shartni qanoatlantiradigan istalgan x uchun j/(x)-/(x,,)|< A- tengsizlik bajarilsa, *y = f(x)* funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

3- ta‘rif. lim Ду = 0 (18.2)
Av-*O

bo’lsa, *y*-/(x) funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

90-chizmada tasvirlangan *y = J\x)* funksiya x,, nuqtada uzluksiz, chunki (18.2) shart bajariladi.

92- chizmada tasvirlangan ,r--./(.v) funksiya x_0 nuqtada uzluksiz emas, chunki lim Ду *0.
\V-MI



92-chizma.

1-misol. ,v = .v funksiyani ixtiyoriy x_n nuqtada uzluksizligini ko’rsating.

Yechish. Bu funksiya butun sonlar o’qida aniqlangan. Ar ni tuzantt /(x) = x^2; /(x,,) = x_n^2; /(x_0 + ДA-) = (x,, + Ar)^2;

Ay = /(x_0 + Ar) - /(.r,,) = (x., + Ar)^2 - x,^{2} = x^2 + 2x,,Ar + Дx^2 - x^2 = 2x,,Ar + Ar ’ ■

Demak, lim \y = lim(2x,,Ax + Ax') = 0 va $y = x^2$ funksiyani ixtiyoriy Ar-*O
Av-40 x
,v(nuqtada uzluksiz.

Shunday qilib, $y = x^2$ funksiya aniqlanish sohasining har bir nuqtasida uzluksiz ekan.

2-misol. y = sinx funksiyani ixtiyoriy x_0 nuqtada uzluksizligini ko'rsating.

Yechish. /(x) = sinx

. x. + Ax - x„ x„ + *Ax* + x
Ay = № + A-v) - /(>„) = sin(x(1 + Av) - sin x„ = 2sin----------- --------cos-------- ------

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

lim Ay -
Av-40

chunki lim sin—-0.
Ar-0 2

Har bir elementar funksiya uchun shu tariqa mulohaza yuritib quyidagi teoremaning to'g'riligiga iqror bo'lamiz.

18.1- teorema. Asosiy elementar funksiyalar o'zlari aniqlangan barcha nuqtalarda uzluksizdir.

Bir tomonlama limit tushunchasidan foydalanib uzluksizlikni quyidagicha ta'riflash mumkin.

4- ta'rif. Funksiyaning x_0 nuqtadagi chap va o'ng tomonlama limitlari mavjud va o'zaro teng bo'lsa, y = /(x) funksiya $x_{()}$ **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

Shunday qilib /(x) funksiya x,, nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun u shu nuqtada aniqlangan va /(x_0 -0) = /(x,, +0) = /(x_0) shart bajarilishi lozim ekan.

Yana 1-ta'rifga qaytib uni lim/(x) =/(lim x) ko'rinishda yozamiz.

Bundan ko'rinib turibdiki x,, nuqtada funksiya uzluksiz bo'lsa funksiyaning shu nuqtadagi limitini topishda limit ishorasini funksiya belgidan ichkariga kiritish mumkin ekan.

3-misol. lim--- „л - = lim — t/i(l + x) - lim t'/i(l + x)^v = *Cn* lim(l + x)' . - *£ne* - 1.
x->0 д- ,r->u д- A--0

Bu yerda *Cnx* funksiyani x e nuqtada uzluksizligidan foydalanib limitni funksiya ishorasi *fn* ning ichkarisiga kiritdik.

5- ta'rif. (a; *b)* intervalning barcha nuqtalarida uzluksiz /(*) funksiya shu intervalda uzluksiz deb ataladi.

Agar funksiya л nuqtada aniqlangan bo'lib lim Лx)=/(v,,) bo'lsa

У = /(x) funksiyax=x_u nuqtada **o'ngdan uzluksiz** deyiladi.

Agar funksiya x=.v,, nuqtada aniqlangan bo'lib lim /(x) = /(x,,) bo'lsa *y*-/(x) funksiya**x**- $x_{()}$ nuqtada **chapdan uzluksiz** deyiladi.

6- ta'rif. y = /(x) funksiya (a; />) intervalda uzluksiz bo'lib *x~a* nuqtada o'ngdan va *x~b* nuqtada chapdan uzluksiz bo'lsa, u [<?;/>] kesmada uzluksiz deb ataladi.

5- va 6- ta'riflarga hamda 18.1 teoremaga asoslanib *y-a'*, y = sinx, y-cosx funksiyalar butun sonlar o’qida, *y=tog„x* funksiya (0;+oo) intervalda, v = funksiya (0;+oo) intervalda, y = -

funksiya (-<»;0)u(0;+<») intervalda uzluksiz ekanligini ta‘kidlab o’tamiz.

Shuningdek ko’phad butun sonlar o’qida, kasr-ratsional funksiya *x* ning kasr maxrajini nolga aylantirmaydigan barcha qiymatlarida uzluksiz ekanini eslatib o’tamiz.

18.2- teorema. Agar фс) vag(x) funktsiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo’lsa, u holda ularning algebraik yig’indisi, ko’paytmasi va g(x„)*0 bo’lganda —

gU)

bo’linmasi ham shu x„ nuqtada uzluksiz bo’ladi.

Bu teoremaning isboti funksiya limitining xossalariga asoslangan.

Endi murakkab funksiyaning uzluksizligiga oid teorema bilan tanishamiz. Nuqtada uzluksiz funksiya xossalarini ifodalovchi teorema bilan tanishamiz.

18.3- teorema. Agar «-^(x) funksiya $x_{()}$ nuqtada uzluksiz, y = /(w) funksiya w_0 = ^(x_0) nuqtada uzluksiz funksiya bo’lsa, u holda *y* = /[^(x)] murakkab funksiya ham x_0 nuqtada uzluksiz bo’ladi.

Isboti. !im/[^(x)]= /[<z>(x,.)J ekanligini ko’rsatamiz. и = ^(x) funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligidan lim да(x) = <p(x_0) = н(> ga ega bo’lamiz, ya‘ni x->$x_{()}$ да w -> *u„*. *f(u)* funksiyaning shu nuqtada uzluksizligini hisobga olsak

lim /[^(x)] = lim *f(u)* = /(«„) = /[^(x_0)].

Shunday qilib ikkita uzluksiz /(«) va p(x) funksiyalardan tashkil topgan y = /[^(x)j funksiya ham uzluksiz bo’lar ekan. Masalan, y=f>?(4-x') murakkab funksiya x ning 4-x^2 >0 tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida, ya'ni (-2; 2) intervalda uzluksiz.

Asosiy elementlar va murakkab funksiyani uzluksizligi haqidagi teoremalarga tayanib elementar funksiyaning uzluksizligi haqidagi qo'yidagi teoremaga ega bo’lamiz.

18.4- teorema. Barcha elementar funksiyalar o’zlarining aniqlanish sohalarida uzluksizdirlar.

4-misol. lim $4^{'mr}$ topilsin.

Yechish. 4>.n,r murakkab funksiya x = -- nuqtada uzluksiz bo’lgani uchun

lim $4^{s,""f}$=$4^{>,1,2}$ =4' = 4 bo’ladi.

5-misol. lim——- topilsin.
x->0 *x*

Yechish. Bu yerda ^ko'rinishdagi aniqmaslikka egamiz. <7^{V}-1 = / almashtirish olamiz. U holda a"- 1x = ^og„(l + ?) bo'lib x-> 0 da/-* 0 va

I- a ~1 г 1
lull--------------= lull -------- ---- -7------r ----- -- *Cog .a - Ina*
д- *1-,I> Cog(l[\+t)* *tog^e*

lim ---- ---------- = ------------------
fog$_n$(l + /) limfog„(l+ /}

bo'ladi. Xususiy holda lim ——- - *tne* - 1 kelib chiqadi, ya'ni x -> 0 da e' -1 ~ *x.* ■^{v}-$^{+0}$ x

6-misol. lim^i^—-topilsin.
x

Yechish. Bu yerda -ko'rinishdagi aniqmaslikka egamiz. (l + x)"-I = y

almashtirish olamiz. U holda (l + x)''=l + y, yoki buni *e* asosga ko'ra logarifmlasak *pCnQ* +

lim + x) *y* = o limM + x) *y* Г *P* ■ 1 • 1 = *P*-
x— x *en(\+y)* X->0 ----- lim ------
x 6?(1 + y)

x) = *tn(* + y) bo'ladi. x -> 0 da y -> 0. Demak,

Shunday qilib, lim ——-—-=*p* formulaga ega bo'ldik.
x-м) Y

Uzluksizlik tushunchasidan foydalanilsa limitni hisoblash ancha osonlashadi, ya'ni uzluksiz funksiyaning biror nuqtadagi limitini hisoblash uning shu nuqtadagi qiymatini hisoblashga keltiriladi.

Endi asosiy elcmentar funksiyalarning aniqlanish sohalarining chetlaridagi iimitlari hamda ajoyib limitlar jadvalini keltiramiz.

1) *x* = *a* nuqtada uzluksiz y = /(x) funksiya uchun lim/(x) = /(a)bo'ladi.

2) lim e^{x} = +oo, lim *e'* = 0.
X->+x V-»-»

3) a>| bo'lganda lim o'--+«>, lima^{r} = 0 bo'ladi.

4) 0 < *a* < 1 bo'lganda lim *a'=0,* lim *a'*= +<o bo'ladi.

5) *a* > 0 bo'lganda lim x" - +», *a*< 0 bo'lganda limx" = 0 bo'ladi;
V—X"*rX

6) lim *Cnx* = +co, lim *tux* = -co.

6') w > 1 bo'lganda lim *tug* x - + », lim *fogx* ~ - ,
Г-»« .Г-.+O

7) 0 < *a* < 1 bo'lganda lim <?og„x =-co, lim fog„x -+-°c .

8) **lim /gx -+co. lim /gx--co.**
x- > ■* -I» r-> ■' • <)

9) Г л
tx **lim** *arctgx* - —э **lim** *arctgx* = -

10) lim^{S}-^ = l.
x

n) =e-

12) lim— ----- = *Cna* .
•'-« x

12') lim—----- - I.
л->° Y

л-о x

14) x = Cna

14') А-.О Д- =

18.3. Uzilish nuqtalari va ularning turlari

Agar /(x)funksiya x,, nuqtada uzluksiz bo’lsa, u shu nuqtada aniqlangan, x,, nuqtada o’zaro teng /(x_0 -0), /(x,, +0) bir tomonlama limitlarga ega hamda bu bir tomonlama limitlar funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati /(x,,)ga teng bo’lishini ko’rdik. Ana shu shartlardan birortasi bajarilmasa, x_0 nuqta /(x)funksiyaning **uzilish nuqtasi,** funksiyaning o’zi x_0 nuqta **uzlukli funksiya** deb ataladi.

Shunday qilib:

1) funksiya x_0 nuqtada aniqlanmagan;
2) funksiya x_0 nuqtada aniqlangan, lekin /(x,,-0) va /(x_o+0) bir tomonlama limitlardan kamida bittasi mavjud emas;
3) funksiya x_0 nuqtada aniqlangan, bir tomonlama limitlar ham mavjud, ammo ular o’zaro teng emas;
4) funksiya $x_{()}$ nuqtada aniqlangan, bir tomonlama limitlar ham mavjud va o’zaro teng , lekin ular funksiyaning bu nuqtadagi qiymatlariga teng emas: /(x_0-0) = /(x_u+ 0) * /(x_0) shartlardan kamida bittasi bajarilganda x,, nuqta funksiyaning uzilish nuqtasi deyilar ekan.

Masalan, _y=^{S}" - funksiya x = 0 nuqtada uzilishga ega(uzlukli), chunki bu x nuqtada funksiya aniqlanmagan. Shuningdek *f(x) = signx* funksiya ham x-0 nuqtada uzilishga egafuzlukli), chunki bu nuqtada funksiya limitga ega emas, ya‘ni /(-0)*/(+0).

Uzilish nuqtalari uch turga bo’linadi.

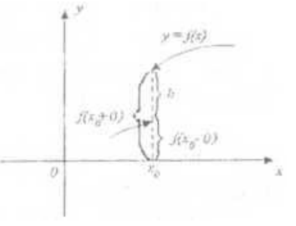
7- ta‘rif. x, nuqtada r= /(x)funksiya aniqlanmagan biroq shu nuqtadagi bir tomonlama limitlar mavjud va o’zaro teng, ya‘ni /(x,,-0)=/($x_{(1}$ + 0) bo’lsa, x, nuqta funksiyaning **yo’qotiladigan uzilish** nuqtasi deb ataladi.

Masalan, x_0 = 0 nuqta y = —-— funksiyaning yo’qotiladigan uzilish nuqtasi, x chunki bu funksiya x = 0 nuqtada aniqlanmagan, biroq

lim = |im = |} ya‘ni /(-0)=/(+0) bir tomonlama limitlar mavjud va o’zaro r_-0 V т-40 Д-
teng. Agar biz funksiyaning x = 0 nuqtadagi qiymati sifatida uning bir tomonlama limitlarining qiymati 1 ni olsak,

/(0)=/(-0)=/(+0) = l bo’lib funksiya x = 0 nuqtada uzluksiz funksiyaga aylanadi va x = 0 uzilish nuqta yo’qoiadi.

8- ta‘rif. Agar y = /(x) funksiya x_0 nuqtada aniqlangan yoki aniqlanmagan, lekin bir tomonlama limitlar mavjud va o’zaro teng bo’lmasa, ya‘ni /(x_{tl} -0) * /(x_0 +0) bo’lsa, x_0



93-chizma

nuqta funksiyaning **birinchi tur uzilish** nuqtasi deb ataladi.

h-f(x_u + 0)-/(x,,-0) son funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi deb ataladi (93-chizma).

Masalan,

$$/(x) = signx = \begin{cases} 1, \; agar\; x > 0,\; bo'Isa, \\ 0,\; agar\; x = 0,\; bo'lsa, \\ -1.\; agar\; x < 0,\; bo'lsa \end{cases}$$

funksiya uchun x = 0 nuqta birinchi tur uzilish nuqtasi bo’lib bu nuqtadagi funksiyaning sakrashi 2 ga teng.

Haqiqatan, *j\x)* = *signx* funksiya x = 0 nuqtada aniqlangan va /(0)=0. /(+0) = lim *signx* = lim 1 - 1. /(-0) ~ lim *signx* = lim (- 1) - — I, ya‘ni x = *0* nuqtada bir tomonlama limitlar mavjud va o’zaro teng emas. Л=/(+0)-/(-0)=1-(-1)=2.

9- ta‘rif. Agar x_0 nuqtada bir tomonlama limitlardan kamida biri mavjud bo’lmasa yoki chcksizlikka teng bo’lsa, x„ nuqta funksiyaning **ikkinchi tur uzilish**jiuqtasi deb ataladi.

Masalan, x = 0 nuqta /(x) = - funksiya uchun **ikkinchi tur uzilish** nuqtasi x bo’ladi, chunki x = 0 nuqtada bir tomonlama limitlarning har ikkalasi cheksizlikka teng,

ya‘ni lim — = -co va lim — = +«?.

л—-О д- x-wO x

18.4. Kesmada uzluksiz funksiyalarning xossalari

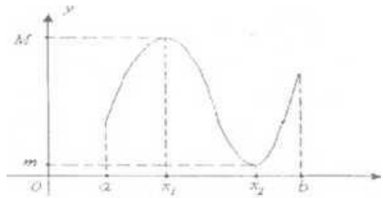
Kesmada uzluksiz funksiyalarning ayrim xossalarini isbotsiz keltiramiz.

18.5- teorema. Agar /(x)funksiya [д; б] kesmada uzluksiz bo’lsa, u holda u bu kesmada o’zining eng kichik va eng katta qiymatiga erishadi, ya'ni [«;/?] kesmada shunday $x_{l?}$ x, nuqtalar mavjud bo’lib [«; Z>] kesmadagi barcha x lar uchun ,/'(x_t)>y(x) va /(x,)</(x) tengsizliklar to’g’ri bo’ladi (94-chizma).

w = /(x,) va *M* = /(xj y = /(x)funksiyaning [a; б] kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlaridir.

Izoh. Teoremaning shartidagi kesmani interval yoki yarim intervalga almashtirish mumkin emas.

Masalan, (0; 1) intervaida uzluksiz *y-x* funksiya bu intervaida o’zining eng kichik va eng katta qiymatlarini hech biriga erisha olmaydi.

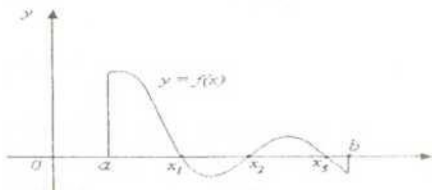


94-chizma

Natija. [a; *b]* kesmada uzluksiz /(x) funksiya shu kesmada chegaralangandir.

Haqiqatan, /(x) funksiya [<?; ft] kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini mos ravishda *M* va *m* orqali belgilasak [a; Z>] kesmadagi barcha x lar uchun *m< f(x)< M* tengsizliklar o’rinli bo’ladi. Agar *C* orqali |mj va *\M* dan kattasini belgilasak |/(x)[<C tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlik /(x)funksiya [a; ft] kesmada chegaralanganligini ko’r atadi.

18.6-teorema. Agar /(x) funksiya [a; ft] kesmada uzluksiz va kesmaning oxirida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u holda (<a; ft)intervaida kamida bitta nuqta mavjud bo’lib, bu nuqtada funksiyaning qiymati nolga teng



5

-chizma.

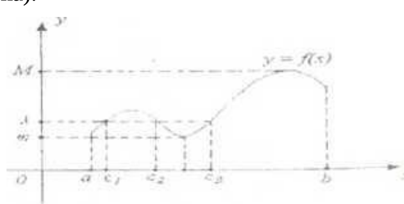
95-chizmada *f(a)>0, f(b)<Q* va X|,x,,x, nuqtalarda funksiyaning grafigi Oxo’qni kesib o’tadi, demak, *f(x*j*) = 0,* /(x,) = 0, /(x.)=0.

18.7-teorema. /(x)funksiya [a; ft] kesmada uzluksiz bo’lib *ni* va *M* uning shu kesmadagi eng kichik va eng katta qiymati bo’lsin, u holda funksiya shu kesmada *m* bilan *M* orasidagi barcha oraliq qiymatlarini qabul qiladi, ya‘ni *m < A< M* shartni qanoatlantiradigan istalgan Л son uchun [a; ft] kesmada kamida bitta *x-c* nuqta mavjud bo’lib, /'(c) -*Л* tenglik to’g’ri bo’ladi (96-chizma).

Izoh. Funksiya [a; ft] kesmaning birorta nuqtasida uzilishga ega bo’lganda 18.6- va 18.7- teoremalar bajarilmasligi mumkin. Masalan,

f(x) = - funksiya uchun /’(-l) = -l<0,

x /■(l)-l>0 bajarilsada y [к 1] kesmaning hech bir nuqtasida nolga



96-chizma.

aylanmaydi. Buning sababi /(x) = — funksiya [-l;l] kesmadagi x- 0 nuqtada X uzilishga ega (91-chizma).

Mustaqil yechish uchun niashqlar va test savollari

Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalari va ularning turlari aniqlansin.

2

1. *y* = ----.Javob: x=3 ikkinchi tur uzilish nuqta.
x - 3

V 4- 1

2. *y*= -y-—л. Javob: x=0; 1; -3; +3 ikkinchi tur uzilish nuqta.
x(x-lXx'-9)

3. v = IA A ~ 0 bo lsa, Javob: x=0 birinchi tur uzilish nuqta.
\ -*agar x <0bo'Isa.*

4 = . Javob: x=0 yo'qotiladigan uzilish nuqta.
x

5. *y* = sin--. Javob: A~0 ikkinchi tur uzilish nuqta.
X

- 27

6. *y* = ----.Javob: x=3 yo'qotiladigan uzilish nuqta.
x-3

2 .

7. /(x) = ----- — • Javob: x=2 birinchi tur uzilish nuqta.
3 + 5'-2

8. /(x)---'—- funksiyaning (-«>,+<») da uzluksizligini ko'rsating.
X" +1

1 9 2

9. ftx) = /g- funksiyaning uzilish nuqtalari topilsin. Javob: 0, ± —, ±—, ...
x *x* *"in*

(in-r 1)я

10. /(x) = —-Л funksiya x-0 nuqta uzluksiz bo'lishi uchun f(0)ni qanday tanlash
x

kerak? Javob: *f(0)=0.*

11. *y* = sin^2- funksiya uchun x - 0 qanaqa nuqta?
x

A) yo'qotiladigan uzilish nuqta
B) birinchi tur uzilish nuqta
D) ikkinchi tur uzilish nuqta
E) uzluksiziik nuqta.

12. j = — funksiya uchun x = 0 qanaqa nuqta?
x

A) yo'qotiladigan uzilish nuqta
B) birinchi tur uzilish nuqta
D) ikkinchi tur uzilish nuqta
E) uzluksiziik nuqta.

13. $f(x)=$ {2x i 5. *agar x* < 0 *bo'lsct.* ,. . . , ,,
funksiya uchun x = 0 qanaqa nuqta?
4 - x. *agar* x > 0 *bo'Isa*

A) yo'qotiladigan uzilish nuqta
B) birinchi tur uzilish nuqta
D) ikkinchi tur uzilish nuqta
E) uzluksiziik nuqta.

14. /(л) - г’- 6л-’+ 9x - 4 funksiya [3; 5] kesmaning qaysi nuqtasida 0 ga aylanadi?

A) 3,5 B)4 D) 4,5 E) 4,6 F) 4,7.

15. /(л) - $_7$— ^{л}уД—< funksiyaning barcha uzilish nuqtalari ko’rsatilsin.

A) 1 B)-l D)-l; 1 E)-7з;7з F) ±1; ±7з.

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

1. Argument orttirmasi nima?
2. Funksiya orttirmasi nima?
3. Funksiyaning nuqtada uzluksiz!igini ta‘riflang.
4. Funksiyani intervalda va kesmada uzluksizligini ta‘riflang.
5. Bir tomonlama uzluksizlikni ta‘riflang.
6. Asosiy elementar funksiyalarning uzluksizligi haqidagi teoremani ayting.
7. Murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremani ayting.
8. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar haqidagi teoremani ayting.
9. Elementar funksiyalar uzluksizligi haqidagi teoremani ayting.
10. Kesmada uzluksiz funksiyaning asosiy xossalarini ayting.
11. Funksiyaning uzilish nuqtasi nima?
12. Yo’qotiladigan uzilish nuqtasi nima?
13. Birinchi va ikkinchi tur uzilish nuqtalari nima?

19-ma‘ruza. Mavzu: Funksiyaning hosilasi, uning geometrik va mexanik ma‘nolari

Reja:

9. Hosila tushunchasiga olib keluvchi masalalar.
10. Hosilaning ta‘rifi va uning geometrik va mexanik ma‘nolari.
11 .Hosilaning bioiogik ma‘nosi.
12. Hosilaning iqtisodiy ma‘nosi.
13. Funksiyaning differensiallanuvchiligi.
14. Differensiallashning asosiy qoidalari.
15. Murakkab funksiyaning hosilasi.
16. Teskari funksiya va uning hosilasi.

Adabiyotlar: 1,2,4,5,9,10,11,13,14,15.

Tayanch iboralar: o’rtacha tezlik, oniy tezlik, o’rtacha zichlik, zichlik, urinma, burchak, koeffisient, hosila, differensiallash, hosilaning mexanik, geometrik, bioiogik, iqtisodiy ma‘nolari, teskari funksiya.

19.1. Hosila tushunchasiga olib keluvchi masalalar

I. Tezlik haqidagi masala. Faraz qilayiik moddiy nuqta to’g’ri chiziq bo’ylab $ = /(/) qonun bo’yicha bir tomonlama harakatlanayotgan bo’lsin, bunda /-vaqt, 5 / vaqt ichida nuqtaning bosib o’tgan yo’li. Vaqtning /<■ momentini qaraymiz. Bu momentda nuqta - /(/Jyo’lni o’tadi. Moddiy nuqtaning t_0 momentdagi oniy tezligini topish masalasini qo’yamiz. Buning uchun vaqtning boshqa

z_0+Ar momentini qaraymiz. Bunga s = /(z_0+Az) o'tilgan yo'l mos keladi. U holda Az = z-z_0 vaqt ichida moddiy nuqta As = s-s_0 = $f(t_n$ + Az)-/(r_0) masofani o'tadi (97-chizma).

________ £__________

97-chizma

v nisbat nuqta harakatining Ar vaqt oralig'idagi **o'rtacha tezligini** beradi. Ar

O'rtacha tezlikning Ar -> 0 dagi limiti r_0 momentdagi **oniy tezlik** deb ataladi va u v_0 orqali belgilanadi.

Demak, v_0 = lim — yoki v_0 = lim + A^- .

V-»0 Д/ ⁷ V-0 Д/

Shunday qilib moddiy nuqtaning r_0 momentdagi oniy tezligini topish

v = Hm ~~/U> + Ar)-/(r_0)~~ (19.1)

.v-»o Д/

limitni hisoblashga keltirildi.

1- misol. Moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab s = r' qonuniyat asosida harakatlanayotgan bo'lsin. Bunda 5- o'tilgan yo'l santimetrda o'lchanadi, z-vaqt sekundda o'lchanadi. г=2сек dan r, =(2 + A/)sek gacha vaqt oralig'ida nuqtaning o'rtacha tezligi topilsin; Ar=l; 0,01; 0,001 deb olinsin. f=2 momentdagi oniy tezlik topilsin.

Yechish. *As* = (*t* + Ar)' - (r)' = /' + $3r^2$Ar + $3rAr^2$ + Ar' -r' = $3r^2$Ar + $3rAr^2$ + Az'.

O'rtacha tezlik v,,.,, =~- = *3r* + 3rAz + Ar^2 bo'adi. Agar Ar=lsek bo'lsa, /=2sek ekanini

hisobga olib v,.,, = $3\text{-}2^2$ + 3-2-1 +1^2 = 19*sm/sek* kelib chiqadi.

Z=2sek, Ar=0,01sek bo'lganda v_{nn} = $3\text{-}2^2$ + 3-2-0,01 + $(0,01)^2$ = 12,0601 *sm/sek* va

z=2sek, Ar= 0,001 sek bo'lganda

$v_{,,\cdot rt}$ =$3\text{-}2^2$ + 3-2-0,001+ $(0,001)^2$ = 12.006001 *sm/sek* bo'ladi. Endi Z=2sek momentdagi oniy tezlikni topamiz.

v_0 = limv,,.,, - limfer^2+ 3ГA/ +Ar^2)= $3r^2$.

Z=2sek bo'lganda v_0 =$3\text{-}2^2$ = *VI sm/sek* hosil bo'ladi.

Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki r Z=2sek ga (л/ 0 ga) qanchalik yaqin bo'lsa o'rtacha tezlik oniy tezlikdan shunchalik kam farq qilar ekan.

2- misol. 9^{onun}*y^{at} asosida tekis tezlanuvchan harakatlanayotgan

(erkin tushayotgan) moddiy nuqtaning harakatning ixtiyoriy / momentidagi va z=3 sekund momentidagi oniy tezliklari topilsin.

Yechish. As = s(z + Ar)-$(r)=-|-(r + Ar)^2 +

л, ■ . . /Xy £/A‹+ ? e
— nisbatni tuzamiz: — = -------------— = ?z +—A/; ta‘rifga binoan
A/ A/ A/ 2

л? (g A
V,. = lim — = lim gt + — A/ = gt.
V-.0 д, л-Ц* 2 J

Demak, / vaqtning istalgan momentida oniy tezlik v_0 = g/ ga teng ekan.
/=3 sek bo'lsa v,,(3)= g-3 = 9,8/»/$eA'-3$(?/t = 29,4»//«?A, ya'ni harakat boshlangandan so'ng uchinchi sekundda moddiy nuqtaning tezligi *29,^m/sek* bo'lar ekan.

2. Sterjenning zichligi haqidagi masala. Uzunligi f ga teng ingichka to'g'ri chiziqli bir jinsli bo'lmagan sterjenni qaraymiz. Shu sterjenning istalgan nuqtasida zichlikni aniqlaymiz. Sterjen Ox o'q bo'ylab joylashgan va uning uchlaridan biri koordinatalar boshida yotadi deb faraz qilamiz. U holda sterjenning har bir nuqtasiga ma'lum x koordinata mos keladi.

Koordinatalari 0 va x bo'lgan sterjen nuqtalari orasidagi qismining massasini *m* orqali belgilaymiz. U holda *m* massa x ning funksiyasi bo'lishi ravshan: *m* = /(x). Sterjenning aniq qo'zg'olmas x_0 nuqtasini hamda o'zgaruvchi x(,+Ax nuqtasini qaraymiz. Sterjenni qaralayotgan qismining uzunligi Ax ga,

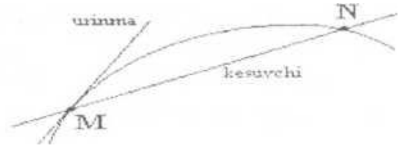
massasi A/» = /(x,, + Ax)-/(x) ga teng bo'ladi. —- nisbat sterjenning x., va x,, + Av Av oraliqdagi **o'rtacha zichligi** deb ataladi.

O'rtacha zichlikning sterjenning uzunligi Ar nolga intilgandagi limiti sterjenning x_0 nuqtadagi **zichligi** deb ataladi va u *8* orqali belgilanadi. Demak, *S* = lim = lim ZU+Arl-Zte,). (|9 2)

Лг-^O Дд- Av-» O Дд-

3. **Egri chiziqqa urinmaning burchak koeffitsienti.** Oldin egri chiziqqa urinma tushunchasini kiritamiz.

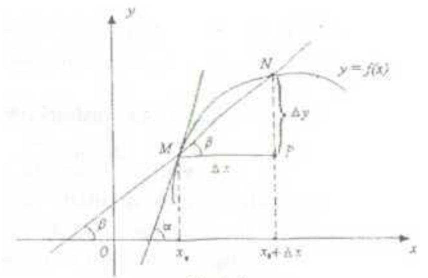
1-ta'rif. Uzluksiz egri chiziqning berilgan Л-/ va ixtiyoriy *N* nuqtasi orqali o'tadigan kesuvehi to'g'ri chiziqning /V nuqta egri chiziq bo'ylab *M* nuqtaga intilgandagi limit holati shu egri chiziqqa A7 nuqtasida o'tkazilgan **urinma** deb ataladi (98-chizma).



98-chizma

Uzluksiz egri chiziq *y* =/(x) tenglama yordamida berilgan bo'lib uning ?W(x(!. .u) nuqtasida egri chiziqqa o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini topish talab etilsin.

Egri chiziqda /V(x_0 + Ax, *y,,* + Ay) nuqtani olib *MN* kesuvchini o’tkazamiz. Bu kesuvchini Ox o’qning musbat yo’naiishi bilan tashkil etgan burchakni orqali belgilaymiz. o’q Urinmaning *Ox* bilan tashkil etgan desak burchakni *a* 99-chizmadagi *MNP* dan



99-chizma

Δy

Ar

ekani ko’rinib turibdi. *N* nuqta egri chiziq bo’ylab *M* nuqtaga intilganda Ar-^0 va/?-»«.

Demak, lim *tgfi = tga* va rgo’= Iim —.

U-»0 Av~*O Ду

Shunday qilib, urinmaning burchak koefTitsientini *к* orqali belgilasak uni topish

A=lim — (19.3)

Ar-0 Дд-

ko’rinishdagi limitni topishga keltirildi.

Biz qaragan masalalarning barchasida ularning fizik mohiyatidan qat‘iy nazar bir xil ya‘ni funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini argument orttirmasi nolga intilgandagi limitini topishga keltirildi. Shuning uchun bu kabi nisbatlarni o’rganish va ularning limitlarini hisoblashni bilish maqsadga muvofiq.

19.2. Hosilaning ta‘rifi, uning geometrik va mexanik ma‘nolari

7 = /(.v) funksiya (a; *b)* intervaida aniqlangan bo’lsin. (a; *b)* intervalga tegishli ,v(, vax_0+Ax nuqtalarni olamiz.

Funksiyaning *x,,* nuqtadagi orttirmasi Ay = /(*,, + Ax)-/(r_w) ni hisoblab --- nisbatni tuzamiz.

2-ta‘rif. Funksiya orttirmasi Ay ning argument orttirmasi Ax- ga nisbatining Ax nolga intilgandagi limiti (agar u mavjud bo’lsa) *y = /(x)* funksiyaning x_0 nuqtadagi **hosilasi** deb ataladi.

Funksiyaning hosilasi *y', /*’(x_0), —, — belgilardan bin bilan belgilanadi.
dx dx

Shunday qilib, /'(x,,) = lim = lim .

"-"Ar " •" Yv

Hosiiani topish jarayoni funksiyani differensiallash deb ataladi.

Endi yuqorida qaralgan misollarga qaytamiz. Hosila tushunchasidan foydalanib (19.1) tenglikni

lim —

4, V-0 Д/

Ko’rinishda yozish mumkin. Demak, to’g’ri chiziqli bir tomonlama harakatda oniy tezlik yo’ldan vaqt bo’yicha olingan hosilaga teng ekan. Bu hosilaning **mexanik ma‘nosidir.** (19.2) tenglikni hosila tushunchasidan foydalanib

<5 = lim — = lim ZU + M-Zfe) =
At-»^{0} Дx Ar-»° Дx

Ko’rinishda yozish mumkin. Demak to’g’ri chiziqli sterjenning *x* nuqtadagi zichligi *m* massadan *x* uzunlik bo’yicha hosila ekan.

Shunga o’xshash (19.3) tenglikni hosila tushunchasidan foydalanib

Дx

Ko’rinishda yozishimiz mumkin. Demak, /'(x_0) hosila geometrik nuqtai nazardan *y = /(x)* egri chiziqqa Л/(x_0,/(x_0)) nuqtasida o’tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientiga teng ekan. Bu hosilaning **geometrik** ma‘nosi.

3- misol. $y = x^2$ funksiyaning istalgan nuqtadagi hosilasi topilsin.

Yechish. /(xj = x^2_u, $f(x_0$ + Ax) = (x_0 + Ax)^2,

Ay = /(x_0 + Ax) - /(x,,)- (x_0 + Ax)^2 - $x_($^{2} = XQ + 2x_0 Ax + Ax^2 - x^2 = 2x_cAx + Ax^2, ^ = UAx$_\pm$A? =

Ax Ax

Hosilaning ta‘rifiga binoan *y'*= lim —= lim(2x_0 +Ax)= 2x_o + O = 2x.,
Av~*o Дy Av-*o

chunki x_{fl} aniq qiymat.

$x_{(1}$ -istalgan nuqta bo’lganligi uchun $y = x^2$ funksiya (-«,+oo) intervalning barcha nuqtalarida hosilaga ega ekanligi va uning hosilasi *2x* ga tengligi kelib chiqadi, ya‘ni (x^2) = 2x._

4- misol. $y = x^2$ parabolaga A/(3;9) nuqtasida o’tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti topilsin.

Yechish. $x_{()}$=3, /(x_0) = /(3) = 3^2 =9. /’(x_0)=2x_0 edi.

Demak, k= /'(3) = 2-3 = 6.

Biz yuqorida hosilaning mexanik va geometrik ma‘nolari bilan tanishdik. Endi uning bioiogik va iqtisodiy ma‘nolari bilan tanishamiz.

19.3. Hosilaning bioiogik ma‘nosi

Ko’paygan mikroorganizmlar soni y va ko’payish vaqti t orasidagi bog’lanish

v = *p(f)*

tenglama bilan berilgan bo’lsin.

Vaqtning aniq / momentiga mikroorganizmlarning aniq *p(t)* soni va vaqtning boshqa / + A/ momentiga mikroorganizmlarning aniq *pit* + A/) soni mos keladi. Ay = /?(/ +A/)-/?(/) ifoda Л/ vaqt oralig’ida mikroorganizmlarni o’zgarish sonini beradi.

nisbat ko’payishning o’rtacha tezligi yoki boshqacha aytganda ko’payishning o’rtacha samaradorligi. y= lim — - *p'(t)* vaqtning / momentidagi mikroorganizm ko’payishining samaradorligini anglatadi. **Bu hosilaning biologik** ma‘nosi.

19.4. Hosilaning iqtisodiy ma‘nosi

Sarflangan xarajatlar miqdori *x* va olinadigan mahsulot miqdori *y* orasidagi moslikni aniqlovchi y = /(x) funksiyani olaylik.

U holda sarflangan xarajatni aniq *x* miqdoriga olingan mahsulotning *f(t)*miqdori va sarflangan xarajatning boshqa bir x + Ax miqdoriga olingan mahsulotning /(x + Ax) miqdori mos keladi. Ay-/(x + Ax)-/(x) ayirma xarajat Ax ga oshganda olingan qo’shimcha mahsulotning miqdorini beradi.

— nisbat sarflangan Ax xarajat miqdoriga mos olingan mahsulot Ax miqdorining o’rtacha o’zgarish tezligidir. y'= lim— -lim ifoda

Xv-*0 Дх д«-*о Ac

xarajatlarning ma‘lum miqdoridagi olingan mahsulot hajmining o’zgarish tezligini (xarajat birligida olingan mahsulot hajmini) anglatadi. Bu **hosilaning iqtisodiy** ma‘nosidir.

19.5. Funksiyaning differensiallanuvchiligi

3- ta‘rif. Agar y = /(/) funksiya x_0 nuqtada chekli hosilaga ega bo’lsa, u shu **nuqtada differensiallanuvchi** deb ataladi.

4- ta‘rif. Agar y-/(t) funksiya (a; *b)* intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo’lsa, u shu **intervaida differensiallanuvchi_deb** ataladi.

Funksiyaning uzluksizligi va differensiallanuvchiligi orasidagi bog’lanishni ko’rsatadigan teoremani isbotlaymiz.

19.1- teorema. Agar y = /(x) funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo’lsa, u shu nuqtada uzluksizdir.

Isboti. y = /(x) funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo’lgani uchun

/'U) =

Ду

chekli limit mavjud. Buni limitning xossasi (16.5-teorema) dan foydalanib

•^ = /’(x.,)+a

\.v ko’rinishda yozish mumkin, bu yerda Ax ->Oda a-cheksiz kichik funksiya. Bundan Ay = /• (x_0)Ax + *a* ■ Ax- va

lim Ay = lim /'(x..)Лх + lim « Av - /’’(x,,)- 0 + 0 0 = 0.

Demak, lim Ay-0 va y-/(x) funksiya $x_{()}$ nuqtada uzluksiz. Shunday qilib funksiyaning chekli hosilaga ega ekanligidan uning uzluksizligi kelib chiqar ekan.

Teskari da‘vo, umuman aytganda, to’g’ri emas, chunonchi nuqtada uzluksiz, biroq bu nuqtada hosilaga ega bo’lmagan funksiyalar ham mavjud.

fx, *agarx* > 0 *bo'Isa*, *y* - *f* (x) ~|x| = < 0, *agarx* = *0*

bo'lsa,

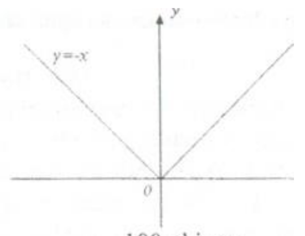
[-x, *agarx* < 0 *bo'lsa*

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya butun sonlar o'qida, jumladan x_o~0 nuqtada ham uzluksiz (100-chizma), chunki /(0)-|0| = 0; lim/(x) = limlxl = 0

v-*0 x->0

va lim *f* (x) = /(0) - 0.

Bu funksiyaning x_o=O nuqtada hosilaga ega emasligini ko'rsatamiz.



100-chizma

Ay = /U> + ДA-) - /(*,,) = |0 + Axj -10| = |Avj $\lim\limits_{U—ЮДХ} \frac{\Delta y}{} = \lim\limits_{Лг—И) Дх} \frac{|\Delta x|}{} = \lim\limits_{\г-»И>Дх} \frac{\Delta x}{} = 1$

$\lim \frac{\Delta y}{} = \lim \frac{|\Delta x|}{}$ lim------- = -l. Shunday qilib АУ Дх

Ar—O Дх

va

Shunga o'xshash

ЛГ-.-0 Дх Ar-*-0 Дд-

nisbat x=0 nuqtada har xil bir tomonlama limitlarga ega. Bu — nisbat xo=0 Дх nuqtada limitga emasligini, ya'ni /'(0) hosilaning mavjud emasligini ko'rsatadi.

Demak, funksiyaning biror nuqtada uzluksizligidan uning shu nuqtada chekli hosilaga ega ekanligi(differensiallanuvchiligi) kelib chiqmas ekan.

19.6. Differensiallashning asosiy qoidalari

19.2- teorema. Agar M(X) va v(x) funksiyalar x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda ularning algebraik yig'indisi, ko'paytmasi va maxraji noldan farqli bo'lganda bo'linmasi ham shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, hosilalar

a)(»±v) =//±v', b) (uv) =Z/'V + HV', d) I — I - " —formulalar yordamida topiladi. kvj v-

Isboti. (Bo'linma uchun). y = /(x) = ~^ bo'lsin, bu yerdav(x)* 0.

v(x)

Ду orttirmani tuzamiz:

Ду = /(r„ + Ду)- rtr„) = + =

vf.V.i+ Av) v(.Y„) v(.Y;. H Лх)r(r,)

= +) - Ц(ЛО) ~ Ы(*o M*o + Дх) + *ч(x0)*)у(х,,) =

v(.v0 +Ax)v(x0)

[;/(л„ < Лх) »(Л,,)]Г(.У,,) »(.У,,)[У(Л;, i- \x) 4vJ] "(V.,)

v(x0 + Av)v(x0) v(x„ + Ar)v(v<>)

Shartga ko'ra lim - *u'(x.,)*, lim — = У'(Х,,) va lim v(x„ + AY) = v(.v0)

Ar-ЮДХ Уг-.чДх Ar-H>

(differensiallanuvchi funksiya uzluksiz).

Demak, = $^{v2}U)$ $\underline{M*,,)}$

Shunday qilib, $y'=$ W $\frac{(\_u\backslash\ u'v - uv'}{\quad}$ a) va b) formulalar ham shunga o'xshash

isbotianadi.

Teorema qo'shiluvchilar va ko'paytuvchilar soni chekli bo'lganda ham to'g'ri bo'ladi. Masalan, (u + v-w^ w'+v'-w', yoki (ww)s= w'w+wv'w+inm'' tenglik o'rinli.

$\left(\frac{u}{C}\right)'$ bunda C-o'zgarmas son.

Natija. O'zgarmas ko'paytuvchini hosila belgisidan chiqarish mumkin,

ya'ni (Cu) =Cw' yoki uHaqiqatan, y = Cw(x) bo'lsa, Ay = Cz/(x_0 + Ax)-Cu(x_0)

Ду _ Cu(x_0 + Ду) - C//(x_0) bo'lib y'= (Cu)'= *C* lim $^{+}$ = *Cu'(x)* bo'ladi.

\v->0 Ду

19.7. Murakkab funksiyaning hosilasi

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasi bilan tanishamiz. ,v = /(«), w = ^(x) murakkab funksiyani qaraymiz.

19.3- teorema. y = *f(u)* va w = ^(x) differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin. Murakkab */(u)* funksiyaning erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasi bu funksiyaning oraliq argumenti *u* bo'yicha hosilasi y,, ning oraliq argumentning erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasi z/'(x) ga ko'paytmasiga teng, ya'ni

X = *y*\, ■ ^{l,}v •

Isboti. *u* = *<p{x)* funksiya x = x_0 nuqtada, y = /(u) funksiya esa bu nuqtaga mos *u,,* - <p(x,,) nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda lim— =/■'(//,,) Az/

chekli limit mavjud. Bundan —- = *f'(u.,)* + *a* yoki Av = /'(//,,)Au + *aku* kelib Ar/ chiqadi, bu yerdagi *a,* Az/-->0 da cheksiz kichik funksiya. So'nggi tenglikni har ikkala

tomonini Ax ea bo'lsak -^ =/'(i/J—+ cr— hosil bo'ladi. Bunda

Av Av Av-

Av > 0 da limitga o'tib

lim —— = y , lim-—= u', lima = lim a = 0 ekanini hisobga olsak isbotlanishi Kv ->() Ду

Av-»C) Ду \u-♦ <)

lozim bo'lgan y'(x,,) =/'(//,,)■ z/'(.v,,) yoki y'_v=y' u'_T kelib chiqadi. Biz bu yerda differensiallanuvchi u(.v) funksiya uzluksiz va Av -> 0 da Az/ --> 0 ni hisobga oldik.

19.8. Teskari funksiya va uning hosilasi

[a; ft] kesmada aniqlangan o'suvchi yoki kamayuvchi y = /(x) funksiyani qaraymiz. /(<?) = c, bo'lsin. Aniqlik uchun y = /(x) funksiya (a; ft] kesmada o'suvchi deb faraz qilamiz. [a; ft] kesmaga tegishli ikkita har xil x, va x, nuqtani olamiz. O'suvchi funksiyaning ta'rifidan agar x, <x_2 va .У|=/($x_($), v, = /(x,)bo'lsa, y, < y, bo'ladi.

Demak, argumentning ikkita har xil x, va x_2 qiymatlariga funksiyaning ikkita har xil _y,

va y, qiymatlari mos keladi. Buning teskarisi ham to’g’ri, ya‘ni y, $<y_2$ bo’lib, y, y, =/(x,)bo’lsa, o’suvchi funksiya ta’rifidan x, $<x_2$ bo’lishi
kelib chiqadi.

Boshqacha aytganda x ning qiymatlari sohasi *[a; b]* kesma bilan *y* ning qiymatlari sohasi [c; *d]* kesma orasida o’zaro bir qiymatli moslik o’matiladi. *y* ni argument, *x* ni esa funksiya sifatida qarab *x* ni *y* ning funksiyasi sifatida hosil qilamiz:

x = (z>(y).

Bu funksiya berilgan y = ./(x) funksiyaga **teskari funksiya** deyiladi. Kamayuvehi funksiya uchun ham shunga o’xshash mulohaza yuritish mumkin.

Shuni aytish lozimki, *y- f(x)* funksiyaning qiymatlari sohasi [c; </] unga teskari *x-<p(y)* funksiyaning aniqlanish sohasi bo’ladi va aksincha. x = ^(y) funksiya uchun y = /(x) funksiya teskari funksiya bo’lgani uchun x = <z>(y) va v = /(x) funksiyalar **o’zaro teskari funksiyalar** deb ataladi.

y = /(x) funksiyaga teskari funksiya y = /(x) tenglamani *x* ga nisbatan yechib topiladi. O’zaro teskari funksiyalarning grafigi Oxy tekisligidagi bitta egri chiziqni ifodalaydi.

5- misol. y = x’ funksiyaga teskari funksiya topilsin.

Yechish. Bu funksiya butun sonlar o’qida aniqlangan va o’suvchi. Tenglikni x ga nisbatan yechsak berilgan funksiyaga teskari *x-i/y* funksiya hosil bo’ladi.

Har qanday funksiya ham teskari funksiyaga ega bo’lavermaydi. Masalan $y\text{-}x^2$ funksiya (-<ю,+эд) intervalda teksari funksiyaga ega emas, chunki y ning har bir musbat qiymatiga x ning ikkita *x = --jy* va *x = Jy* qiymatlari mos keladi. Agar y = x^2 funksiyani (-«o,0] intervalda qaralsa funksiya *x = -Jy* teskari funksiyaga ega, chunki y ning har bir musbat qiymatiga x ning yagona y = .v^2 tenglikni qanoatlantiradigan qiymati mos keladi. Shuningdek y = x^2 funksiyani [0,+a>) oraliqda qarasak unga teskari *x = Jy* funksiya mavjud bo’ladi.

Г/oh r= /'(x) funksiyaga teskari v — </?(funksiyaning argumentini odatdagidek x bilan, funksiyani esa *y* bilan bclgilasak va y = /(x) hamda v = «?(x) funksiyalarni grafigini bitta koordinatalar sistemasida chizsak grafik birinchi koordinatalar burchagining bissektrisasiga nisbatan simmetrik bo’ladi.

19.4- teorema. Agar o’suvchi (kamayuvehi) *y =f(x)* funksiya [a; Z>] kesmada uzluksiz, shu bilan birga *f(g)=c, f(b)=d* bo’lsa, u holda unga teskari x = p(.y) funksiya [c; </]([rf; c]) kesmadaaniqlangan monoton va uzluksiz bo’ladi.

Endi *x = (p(y)* teskari funksiyani hosilasini bilgan holda y = /(x) funksiyaning hosilasini topish imkonini beradigan teoremani isbotlaymiz.

19.5- teorema. Agar x = <o(y) funksiya biror intervaida monoton bo'lib shu intervalning y nuqtasida noldan farqli <p'(y)hosilaga ega bo'lsa, bu nuqtaga mos *x* nuqtada teskari *y = f(x)* funksiya ham hosilaga ega bo'lib.

p(y) tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Shartga binoan x = ^(y) funksiya monoton va differensiallanuvchi bo'lgani uchun u uzluksiz hamda unga teskari monoton va uzluksiz *y-f(x)* funksiya mavjud. *x* ga Av/0 orttirma bersak *y* = /(x) funksiya Ay orttirma oladi va uzluksizligini nazarga olsak Ax - > 0 da Ay - > 0. Natijada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$ .. 1 1 hm = ----- AV-»o Ax Ax lim — Ay A'-*0 Ay 1 <A(y)

Bu formulani y'. = ko'rinishda yozish ham mumkin. Xv
Shunday qilib, teskari funksiyaning hosilasi shu funksiya hosilasiga teskari miqdorga teng ekan.

Mustaqil yechish uchun mashqiar va test savollari

1. y = x^J funksiyaning x=2 nuqtadagi hosilasi topilsin. Javob: y'(2) = 12.

2. Nuqta $ = 5r'-3/^2+4 qonuniyat asosida to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda, bunda 5- o'tilgan yo'l santimetrda o'lchanadi, /-vaqt sekundda o'lchanadi. /=1 sek. dan *t*, -(1 + Д/) sek vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlik topilsin, bunda д/=0,5; 0,3; 0,1 qiymatlarni qabul qiladi. /=1 sek. momentdagi oniy tezlik topilsin. Javob: A/=0,5 da *vu•n-=\5,25sm/sek', At* = 0,1 da *vn•rl =\0,2\sm/sekAt*- 0,3 da v(•/7 = 13,01 *sm/sek ;* v_0 = v(l) = 9 *sm/sek* .

3. y = x' egri chiziqqa Л/(2; 8) nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti topilsin. Javob: £=12.

4. *y = tfx* funksiyaning x=0 nuqtada hosilaga ega emasligi ko'rsatilsin.

5. y = 3.x - 2 funksiyaga teskari funksiya topilsin. Javob: x = ---+~ .

6. y = x* funksiyaga teskari funksiya mavjudmi? Javob: (-<o;+a>) da yo'q, (-oo. o] da .Y = - Vy ^v a [0:+«o) dax=^/y.

7. y - a^x funksiyaga teskari funksiya topilsin. Javob: x = *£og,,y.*

8. y = e^4 funksiyaga teskari funksiya topilsin. Javob: *x-Cny.*

9. Hosila haqida quyida bayon etilgan fikrlardan noto'risini ko'rsating.

A) to'g'ri chiziqli harakatda oniy tezlik yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosiiani ifodalaydi

B) /'(x,,) hosila y = /(x) egri chiziqning Л/п(x(1;/(x;,)) nuqtasida unga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini ifodalaydi

D) hosila sterjnning istalgan nuqtasidagi zichligini ifodalaydi

E) to'g'ri chiziqli harakatda yo'l tezlikdan vaqt bo'yicha olingan hosiiani ifodalaydi

F) hosila xarajatlarning ma'ium miqdorida olingan mahsulot hajmini o'zgarish tezligini ifodalaydi.

10. Noto'g'ri javob ko'rsatilsin.

A) biror nuqtada differentsiallanuvchi funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladi

B) biror nuqtada uzluksiz funksiya shu nuqtada differentsiallanuvchi bo’ladi

D) hosila vaqtning istalgan momentidagi mikroorganizm ko’payishining samaradorligini ifodalaydi

E) tezlanish tezlikdan vaqt bo’yicha olingan hosiladir

F) (M(A-) V(A-)) = M(X) V(X)+I/(X) V(X) tenglik o’rinli.

11. Noto’g’ri javob ko’rsatilsin.

A) *y = f(x)* va л--да(у) o’zaro teskari differentsiallanuvchi funksiyalar uchun

/'(A-) = —~ tenglik o’rinli. bunda 0
P'O’)

$$B)\ \left(\frac{u(x)}{C}\right)' = \frac{u'(x)}{C} \qquad (C = \text{const})$$

$$D)\ \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u(x)'v(x) - u(x)v(x)'}{v^2(x)}$$

E) (W(A) + V(A-)) =$_U$(X) +V(X)

F) y =/(w), u = p(x) bo’lib /(«) va *<p(x)*differentsiallanuvchi funksiyalar bo’lganda y_v = *y,, u_x* tenglik o’rinli.

12. y-A-^{2} bo’lsa y'(6) topilsin.

A) 14 B) 12 D) 15 E) 8 F) 27.

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

1. Hosila tushunchasiga olib keluvehi masalalardan bir nechtasini ayting.
2. Egri chiziqqa urinma deb nimaga aytiladi?
3. Urinmaning burchak koeffitsienti nimaga teng?
4. Funksiyaning nuqtadagi hosilasini taTiflang.
5. Hosilaning geometrik va mexanik ma‘nolarini ayting.
6. Hosilaning biologik va iqtisodiy ma'nolarini ayting.
7. Funksiya qaehon differensiallanuvchi deyiladi?
8. Funksiyaning intervaida diffcrensiallanuvchiligini taTiflang.
9. Differensiallanuvchi funksiya uzluksiz bo’ladimi?
10. Uzluksiz funksiya differensiallanuvchi bo’ladimi?
11. Differensiallashning asosiy qoidalarini ayting.
12. Murakkab funksiyaning hosilasi qanday topiladi?
13. Berilgan funksiyaga teskari funksiya deb nimaga aytiladi?
14. Teskari funksiya qanday topiladi?
15. Qanaqa funksiyalarga teskari funksiya mavjud bo’ladi?
16. Teskari funksiyaning hosilasi qanday topiladi?

20- та‘ги7.а. Mavzu: Asosiy elemental’ funksiyalarning hosilalari

Reja:

1. O’zgarmas funksiyaning hosilasi
2. Logarifmik funksiyaning hosilasi.
3. Darajaii funksiyaning hosilasi.
4. Ko’rsatkichli funksiyaning hosilasi.
5. Trigonometrik funksiyalarning hosilalari.
6. Teskari trigonometrik funksiyalar va ularning hosilalari. **Adabiyotlar:** 1,2,4,5,9,10,11,13,14,15.

Tayanch iboralar: hosila, teskari funksiya, monoton, o'suvchi, kamayuvehi, murakkab funksiya.

20.1.O'zgarmas funksiyaning hosilasi

20.1- teorema. O'zgarmas funksiyaning hosilasi nolga teng, ya'ni C'-O, bunda C'-o'zgarmas son.

Isboti. *y-f(x) = C* desak *x* argument Ax orttirma olganda *y* funksiya Ay- /(x + Ax)-/(x) = C-C = 0 orttirma oladi.

Demak, *C'*~ lim —- = lim= 0. Shunday qilib C '= 0.
ЛмО Дд-

Masalan, (25)' = (2^{IS}) = (rg20°) = (in 87) = 0.

20.2. Logarifmik funksiyaning hosilasi

20.2- teorema. Inx lagorifmik funksiyaning hosilasi — ga teng.
x

Isboti *y=/nx* funksiyani qaraymiz. x Ax orttirma olganda funksiya

Ay=ln(x + Ax)-lnx = !n ^{л} -ln| 1+-—J orttirma oladi.

Av I (Av3 I x (ДхЗ 1 . f Ax\\v . . . Ar , ,
—- =—In 1 + — = ------- In 1 + — =-ln 1 + — msbatm tuzamiz. —-*a* deb
Av Ar (x) x Av к x) *x* к x) x
belgilasak Ax—>0 da a—>0.

Demak, *v* - lim —In; I -----i = —limln(l + o-L =-lne- —, ya'ni (lnx)'='. ^{v}'-'°x к x *J*
x x x

Bu yerda lim(l + *a)*^{u} = *e* ikkinchi ajoyib limitdan fovdalanildi.

Shunga o'xshash (log„x)' = I —— - —-— kelib chiqadi (bunda *a*>0,
к In *a)* Inc; xhirt
rtfl).

Agar *y In»* bo'lib, bunda, » = i/(.r) differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, u holda murakkab funksiyani differensiallash

qoidasiga binoan (In;/) - — tenglikka ega bo'lamiz.
u

Xususan, agar y = log,, w, $u = u(x)$ bo’lsa, u holda

(log,,u) =i —I = -^-(1пм) =—-— bo’ladi.
Цпа J in a In a-u

20.3. Darajali funksiyaning hosilasi

20.3- teorema. x^a darajali funksiyaning hosilasi ax"$^{-1}$ ga teng, bunda a-o’zgarmas son.

Isboti. y=x“ funksiyani qaraymiz. Uni e asosga ko’ra logarifmlab In y - alnx tenglikka ega bo’lamiz. y ni x ning funksiyasi hisoblab, tenglikning ikkala qismini x bo’yicha differensiallaymiz: ~ = a •- .

y x

Bundan $y' = a\,y$ —= $a\,x^a$ • —= $a\,x'''^1$. x x

Shunday qilib fx“) = a ■ x"–^{1}. Teorema isbotlandi.

Agar y-$_u{}^a$ bo’lib, iz = u(x) differensiallanuvchi funksiya bo’lsa, u holda murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga binoan = a $_М$' bo’ladi.

1- misol. y = >lx funksiyaning hosilasi topilsin.

Yechish. $y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$ —.Demak, (Vxj = 2Vx 1 2-V x

2- misol. y-- funksiyaning hosilasi topilsin.

Yechish. y' - $\left(\frac{1}{x}\right)'$ $\left(x^{-1}\right)'$ -x^{2} £ л* Demak, f ^{1} j = - Д-. Ы x-

Izoh. Funksiyaning hosilasi topilsin deyilganda shu funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli istalgan nuqtada uning hosilasini topishni nazarda tutiladi.

20.4. Ko’rsatkichli funksiyaning hosilasi

20.4- teorema. a^x ko’rsatkichli funksiyaning hosilasi a'lna gatengdir.

Isboti. y=a (a>0, <7#1) funksiyani qaraymiz. Uni e asosga ko’ra logarifmlasak lny = xlna bo’ladi. ynixning funksiyasi hisoblab, tenglamaning

ikkala qismini x bo’yicha differensiallasak. — = lna bo’ladi. Bundan y'-ylna $У$

yoki y'-a'lnu kelib chiqadi. Demak, (u') - a'lna.

y-a'' murakkab funksiya uchun (a") - a'' In an' formulaga ega bo’lamiz. Xususiy holda a e bo’lsa Inc - I bo’lib (ej = c^v va (<■") e'' u' formulalarga ega bo’lamiz.

3- misol. y-2' bo’lsa, y' topilsin.

Yechish. (2^V)= 2'In2.

4- misol. y = 3^{v}’ bo’lsa, y topilsin.

Yechish. y - (з^л) - 3' ln3(x^2)' = 3^{V}' ln3-2x.

5- misol. y = e^л" bo’lsa, *y* topilsin.

Yechish. *y'* - (e^v) - *e'* (x’)' = e^x $3x^2$

20.5. Trigonometrik funksiyalarning hosilalari

20.5-teorcma. *sinx* funksiyaning hosilasi *cosx* ga teng.

Isboti. *ysinx* funksiyani qaraymiz. x ga *i\x* orttirma bersak funksiya

Ax + xj . fx + Ax-x'i „ (A1Л . Ax
—— *sin*-------------------~ 2cos x +— sin——
2 J I 2) < 2 J 2

Ay=.ww(*+ .\x)-sinx=2cos x +

„ . Ax (Atj AY
2 sin COSX+- «in z \

_ L„Ld=!L2.4A

orttirma oladi. Shuning uchun

. Ar
, sin f
va y'-(sinx) ~ lim- ---- lim cos'x + -—— = 1 ■ cosx = cosx.
v ’ л«-ю Ar w-»« y 2 *J*
2

Bu yerda birinchi ajoyib limitdan hamda *cosx* funksiyaning uzluksizligidan foydalanildi.

Shunday qilib, (sinx) =cosx.

y = sinw (bunda »=z/(x)) murakkab funksiya uchun (sin«) = COSH-U' formulaga ega bo’lamiz.

6- misol. *y* = sin Vx funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $\cos\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)' = \cos\sqrt{x}$ 1 _ cosVx
2jx~ 2Jx

7- misol. y = $\sin^2 x$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. y' = ($\sin^2 x$) -(($(\sin x)^2$) - 2sinx(sinx) - 2sin .r -cosx = sin 2x.

8- misol. y - sin(lnx) funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. *y’* = cos(ln x)(lnx) - .C0S(*n:Y) _
x

20.6- teorema. cosx funksiyaning hosilasi -sinx ga teng.

Isboti. *y* = cosxfunksiyani qaraymiz. Keltirish formulasidan foydalanib uni *(n* A *y* = cosx - sin)—xj ko’rinishda yozamiz. Demak, r - cosu (bunda *u* zz(x)) murakkab

$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)'$ = sinx (0-1) --sinx, yoki (cosx) = -sinx.

funksiyani hosilasini topish uchun (cosu) - sin« w' formulaga ega bo’lamiz.

9- misol. *y* - $\cos x^5$ funksiyaning hosilasini toping.

Y echish. *y'* = -sinx’(x’) = -sin v' ■ $3x^2$.

10- misol. *y* ~ $\cos Vx^2$ +1 funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $y' = -\sin\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = -\sin\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)' =$

$-\sin\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x = -\frac{x\sin\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

20.7-teorema. *tgx* funksiyaning hosilasi —eateng.
COS' x

Isboti. *tgx*=^-^~ bo'lganligi sababli bo'linmani hosilasini topish qoidasiga cosx binoan

(sinx A _(sinx)'-cosx-sinx(cosx)'_cosxcosx-sinx(-sinx) $\cos^2$x + $\sin^2$x_ I к cosx J $\cos^2$x

cos'x $\cos^2$x $\cos^2$x

Shunday qilib, *(tgx)* =■—. *y-tgu* (bunda, *u~u(x))* murakkab funksiyani cos ˉ x hosilasini topish uchun *(tgu)* =—formulaga ega bo'lamiz.
cos *u*

11- misol. *y=tg*~ funksiyani hosilasini toping.
x

1

Yechish. / =——— X'COS'

$\cos^2$ -
x x

12- misol. *y- tg 4x* funksiyani hosilasini toping.
Yechish.

У = = 3«!J7 ■ («Лг - —! ■
cos Vx 2Vx-cos'Vx

20.8-teorema. *ctgx* funksivanina hosilasi----------- ^-gateng.
sitr x

Bu teoremani isbotlashni o'quvchiga qoldiramiz.

13- misol. j^ = crgV2x^2 + l funksiyani hosilasini toping.
y =--------Д_. (72x41) = --------------- Д— —7=1— • (2x^2 +1)' ~
$\sin^2$V2x^2 + l sin'v2x' + l 2v2x' + 1

=________ 1 _ 1___________4v = __________ 2x ____________
sin'72x^2 + l 2-У 2x^2 +1 sin\'2x + 1-72x^2 + 1

20.6. Teskari trigonometrik funksiyalar va ularning hosilalari

1) *y=arcsinx* **funksiya. x** = siny funksiyani qaraymiz. Bu funksiya -'-<*y*< — kesmada monoton o'uvchi bo'hb uning qiymatlari -1 < x < 1 kesmani to'ldiradi.

Shuning uchun bu funksiya aniqlanish sohasi [-l.rl] dan, qiymatlari sohasi kesmadan iborat teskari funksiyaga ega (19.4-teorema).

2

" 2 _ , Jt

101-chizma.

Odatda uni y-arcsinx ko'rinishda ------------------ yozish qabul qilingan. Demak x=siny va y = arcsinx funksiyalar o'zaro teskari funksiyalar. y = arcsinx funksiyaning grafigi 101-chizmada tasvirlangan D(arcsinx) = [-1,1], E(arcsinx)

20.9. teorema. arcsinx funksiyaning hosilasi

~~-7-~~ gateng.. $x/1 -x^2$

Isboti. y = arcsinx funksiyani qaraymiz. x = siny funksiya bu funksiyaga teskari funksiya bo'ladi.

O'zaro teskari funksiyani hosilasini topish formulasi y(=~ (19.5.teorema) dan x',

f > . ■ , I 1 1

(siny),. cosy $\pm$^/l-sin^{2}y 7^1-s^{in2}J' vl-x^2

chunki kesmada cosy>o bo'lgani uchun ^1 -sm^{2}y oldidagi plyus ishora olindi.

Shunday qilib, (arcsinx) - -----,
V1 - x^2

y - arcsinu (bunda, u = u(x)) murakkab funksiya uchun (arcsin») = vl - »

hosilani topish formulasiga ega bo'lamiz.

14-niisoI. *y* - arcsine^4 funksiyani hosilasini toping.

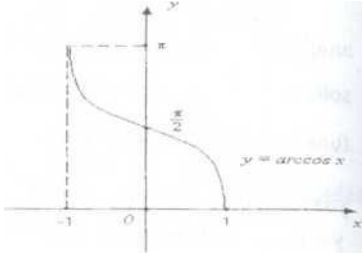
Yechish. / - (e')' _ e'
71 -(e')^2 *x*\-*e*^{2}'

15-misol. v - 2 arcsin Jx funksiyani hosilasini toping. 1

1

Yechish. .) ' - 2(arcsin Jx)' = 2 - 2 .
yl-(Vx)^2 x'1-x *yjx (\~x)*

kesmada monoton kamayuvchiligini bilamiz. Shuning uchun bu funksiyaga teskari funksiya mavjud (19.4 teorema) bo'lib uning aniqlanish sohasi [-1,1] kesmadan, qiymatlari sohasi [O; я] kesmadan iborat bo'ladi. *x-cosy* funksiyaga teskari funksiyani y = arccosx kabi yoziladi. y - arccosx funksiyaning grafigi 102-chizmada tasvirlangan. D(arccosx) =[-1,1], E(arccosx)= [0;/r] ekani ravshan.



102-chizma.

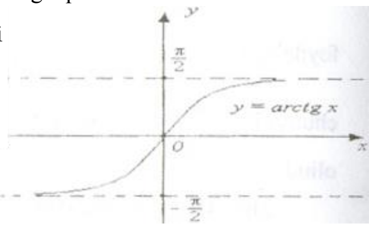
Teoremaning isboti 20.9-teorcmaning

20.10-teorema. arccosx funksiyaning hosilasi- $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ga teng.

isbrtini takrorlagani uchun uni isbotlashni o'quvchiga qoldiramiz.

3) y = arctgx **funksiya.** x = tgy funksiyani qaraymiz. Bu funksiya -y <y< intervaida monoton o'sadi. Shuning uchun bu funksiyaga teskari funksiya mavjud(19.4-teorema) bo'lib uning aniqlanish sohasi butun sonlar o'qidan iborat. x = tgy funksiyaga teskari — funksiya y = arctgx kabi yoziladi.

va



103-chizma.

Demak D(arctgx) = (-«>; co), — E(arctgx)=[-^i]

lim *arctgx* = —, lim *arctgx* - —.
2 2

y = arctgx funksiyaning grafigi 103-chizmada tasvirlangan.

20.11-teorema. arctgx funksiyaning hosilasi —Ц- ga teng.
I + A'

Isboti. y = arctgx funksiyani qaraymiz. *x=tgy* funksiyaga teskari funksiya

bog'langan. Shuning uchun $y' = \frac{1}{(tgy)'_y}$, $\frac{1}{\cos^2 y}$ = cos' y —-Ц— = - 1 I *tgy* l + .x- . Demak,

bo'lganligi sababli ularning hosilalari (19.5-teorema) y_v = — tenglik orqali
,v.

(arctgx) ■-——. *y-arctgii* murakkab funksiyani hosilasi *(arctgu)'*~ formula
I + Jl- " N *u*~
yordamida topiladi.

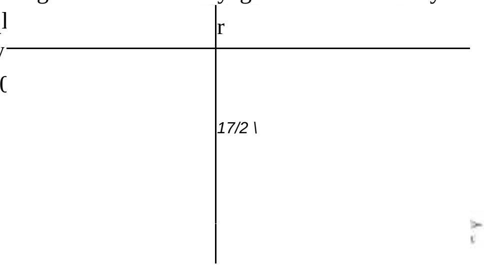
16-misol. *y=(arcfgxY* funksiyani hosilasini toping.

Yechish. y' - *3(arctgxY -(arctgx*)' =3(arc(gx)^2 —L-.

17-misol. *y~arctgx*^{2} funksiyani hosilasini toping. X/ **K** U < t*^{2})' 2.V

Yechish. *y'*- **4**—- --------,
l + (x^2)^2 1 + x^4

4) y = arcctgx **funksiya.** x = etgy funksiyani qaraymiz. Bu funksiya *0<y<л* intervalda monoton kamayuvehi. Shuning uchun bu funksiyaga -- teskari funksiya mavjud (19.4- teorema) va uning aniql
x = etgy funksiyaga teskari funksiya y
D(arcctgx)= (-oo,+oo), E(arcctgx) = ((



104-chizma.

lim arccfgx = ?r, lim *arcctgx* = 0. y = arcctgx funksiyaning grafigi 104-chizmada tasvirlangan.

20.12-teorema. *arcctgx* funksiyaning hosilasi—ga teng.
1 + X"

Teoremani isboti 20.11-teoremani isbotiga o’hshaganligi uchun uni isbotini o’quvchiga qoldiramiz.

y = arcctgu murakkab funksiyani hosilasi (arcc/gi/) = - formula
I + *u~*

yordamida topiladi.

18-misol. y - arcctgx* funksiyani hosilasini toping. _

Yechish. 4x’
1 + (x^4)^2 1 + x^x

19-ntisol. *y = arcctg*— funksiyani hosilasini toping x
flj

■ ■ <’ 1 1 x^2) _ _.v
I 1 A"’ 4 I Л-^{2} + 1
Л .V^2

Izoh. Murakkab funksiyalarning *u = u(x)* oraliq argumenti ditfercnsiyallanuvchi deb faraz qilindi.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari bevosita foydalanib

Hosilaning ta rifidan qo'yidagi funksiyalarning hoisilalari topilsin.

1v=x^4 Javob: 4x^3.

2. v= V.v . Javob: —4=.
2-Jx

3.y=-= Javob:----------
Vx 2xVx

4. *y=x^J* * 2x^2-3x+ 1. J avob: 3x^2+4x-3.

Egri chiziqlarga urinmalarning burchak koeffitsientlari topilsin.

5. a)x=1 da javob: 4, b)x=-—da javob: .

6. y=$\frac{2}{x}$. a)x=l da javob:—2, b)x=-~ da javob: -18. (1/3)

7. y^Jx. x~4 da javob:

Funksiyalarning hosilalari topilsin.

8. jy-x^6-$2x^3$+3x+12. Javob: y'-6x'-$6x^2$+3.

9. $y=3x^4$-x. Javob: y'=12x'-l. **10.** y~~— + -—-2x. Javob: y'=-—+ —-2.
a b ' a b

11. y-^{2}-—:2_i-^{4} .Javob: v'= ——. **12.** y=$4x^2$-$6x^2$+x Javob: v'=10x-'-$9x^2$+1. 6 3

13. y- y/5x + 2Vx - -. Javob: y'=-~ + + Д-.
X 2л/x 3V? *

14. y-(1 +4x') (1 +$2x^2$). Javob: y ~4x(1 -i-3x+1 Ox^3).

$2x^4$ т , , 4x'(2<r-x^2) b-x I . ,_26

15. y-. Javob: y~—------------------——. **16.** y- -------- . Javob: y = --------------—
a^2-x^2 (a--x^2)- - 6 + x $(6 + x)^2$

17. y -———.Javob: y' - is.y=$(4x^3+2)^3$. Javob: y'- $36x^2(4x^3+2)^2$.
x + 3 (x + 3)* 19. y~v<7^2-x^2 . Javob: y'=--=^==. 20. y = (a + x) Vo-x .
Javob: y'=-^7=^.
Ya^2-x^2 2V«-x

fl г I

21. y-j——.Javob: v'~--------------- .**22.** y = 3sinx - 7cos5x. Javob: y'=3cosx + 35sin5x.
Vl-x (l-xh/T-x^2

23. y - tg(3x -2). Javob: y - —-------------- . **24.** y = sin'x . Javob: y' = 5sinx ■ cosx.
cos(3x - 2)

25.y$^=$—^7^—. Javob: y'——**26.** y = xsinx + cosx. Javob: y' —xcosx.
1— sinx l-sinx

27.y nVsin2x. Javob: y'--—. 28. y = 3sin'—. Javob: y' = 4sin'— .cos —. Jsin2x 3
3 3

29. y - In sin x. Javob: y' —cigx.

30. y = Inc/g'x. Javob: y' = ---- . **31.** y=ln i-$^+$—^{n}- . Javob: y'-———.
sin2x ' v I-sinx cosx

Ko'rsatma. y= -| ln(I i-sinx)-ln(l-sinx)] dan foydalanilsin.

32. v=lnta$\frac{V}{2}$. Javob: y' =--------- .
sinx

I—"> I

33. > - ln(x 1- vx+ a). Javob: y'=-===.
V.v^2 +<■/

34. y = sin(cosx). Javob: y'=-sinx ■ cos(cosx).

35. y = (xtgx)'. Javob: y'-3(xtgx) Ggx+—!.
< COS'X/

36. У = log„(x'+ 4). Javob: *y'*~——^ˣ--------- .37. y = ln— Javob: y'=—.
(д-+4) In я 1-x I-x

38. y - ln(sin²x + x). Javob: *y'*- s›n-^ —_ 39. y = xlnx.
sin x + x Javob: *y'* = lux +1

40. y - (Inx)⁶. Javob: y= 6I?--X . 41. y = ln(lnx). Javob: v'=— xlnx
= —I—3<.
„ 2 A'

42. *y - e* '■. Javob: *y - -2xe~ˣ'*. 43. *y=l'²*. Javob: 2 cos'
2
1
1 + *eˣ*

44. *y=e^**. Javob: y' = e". 45. ' 2-Vx У = in . Javob:
1 + e'
, i
yja' - л*²

46. *y=*ᶜ-—-. Javob: *e'* y =— ----r . 47.
+1 (e'+l)²
y = arcsin —. Javob:
a *a*

48. y = (arccosx)³. Javob: *y'* -- . 49. y = arctg—. Javob: y'-— ,2
Vl-x² *a* - *a*-+ *x*-
2x -. 2x . , , _ 2
----- --- -.51. y - arctg -------- 7. Javob:;'---------- -.
1 + (x' + 1)' 1 - x' 1 + x"

50. y = arcctg(x² +1) . Javob: *y'*= -
x²+— arcsin—. Javob: *y'--Jlr-x~* .
52. *y= '\la* 2 *a*

53.y = 2arcsinx.Javob: y' = arcsinx + —*r*~—. 54.y = arcsin(lnx). Javob: *y'*~—. . . ■
Vl-x² xVl-ln²x

/1-COSX , 4 11,1
55. y = arctgj --------- (o< x < *я). Javob: y-~*
Vl + cosx 2

56. Noto'g'ri formulani ko'rsating.

A) (lnx)'=l B)(x")' = F) (2')' or"¹, bunda *a*-const. D)(sinx) = cosx E)(cosx) = -sinx

⁷ In2

57. Noto'g'ri formulani ko'rsating.

A) (arcsin x) - -4=, B) (arccosx) =
VI -x²
, J— D) *(arctgx)* - ——
E) *(arectgx)* ------— VI - *x²* • + *
1 + x F) *(tgx)* =----- V .
COS'X

58. /(x)--sin'x bo'lsa topils
ii.

A)^. B)^ D)3/2 3 л/3
2 4 8 .| ?

59. /(x)=x'lnx bo'lsa /(1) topilsin.

A) 3 B)2 D) 1 E) 4 F) 6.

60. /(x) = -^f^A bo'lsa /[y i topilsin.

A) —■ B) 4 D) -4 E) - Д F)
x x *л"*

61. /(x)= x’Чп'-Уx bo’lsa /(l) topilsin. A) -^{1}- B) - D) - E) - F) —.
’ 3 4 6 8 12

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

1. O’zgarmas sonning hosilasi nimaga teng?
2. Logarifmik funksiyaning hosilasi nimaga teng?
3. Darajali funksiyaning hosilasi nimaga teng?
4. Ko’rsatkichli funksiyaning hosilasi nimaga teng?
5. sinx ning hosilasi nimaga teng?
6. cosx ning hosilasi nimaga teng?
7. tgx ning hosilasi nimaga teng?
8. ctgx ning hosilasi nimaga teng?
9. arcsinx funksiyaning hosilasi nimaga teng?
10. arccosx funksiyaning hosilasi nimaga teng?
11. arc tgx funksiyaning hosilasi nimaga teng?
12. arcctgx funksiyaning hosilasi nimaga teng?

21- ma'ruza. Mavzu: Ba'zi elementar funksiyalarning hosilalari. Hosilalar jadvali

Reja:

1. Giperbolik funksiyalar va ularning hosilalari
2. Oshkormas funksiya va uning hosilasi.
3. Funksiyaning parametrik beriiishi va parametrik berilgan funksiyaning hosilasi.
4. Hosilalar jadvali.

Adabiyotlar: 1,2,4,5,9,10,11,13,14,15.

Tayanch iboralar: giperbolik funksiyalar, oshkormas funksiya, paramerik funksiya.

21.1. Giperbolik funksiyalar va ularning hosilalari

, *e'-e*^{x} , e'+e'^{T} , e'-e' , e^{v}+e'"

shx- ---------- , *chx* =------------ , *thx* = —--------—, *ctI ix* —--------- --

2 2 *e'* + e' *e'* — *e '*

tengliklar yordamida aniqlanadigan funksiyalar **giperbolik** funksiyalar deb ataladi.

Bunda *shx*- **giperbolik sinus, cЛх-giperbolik kosinus,** *thx*= — - **giperbolik** chx **tangens,** *cthx*= —-- **giperbolik kotangens** deb ataladi.

shx

Bu funksiyalar orasida

$$ch^2x\text{-}sh^2\,\mathbf{x\text{-}1},\ ch^2\,x+sh^1x=ch2x,$$

$$sh2x=2shx\ chx,\ ch^2x\sim\text{-------- --- —}$$

1 - th' x aynivatlar o'rinli ekanligini tekshirib ko'rishni o'quvchiga tavsiya etamiz.

Endi shu funksiyalarni hosilalarini topish formulalarini hosil qilamiz.

si) X sir X

Hisoblashda (c')' = c",(<?")' = -e'" ekanligidan foydalandik.

Shunday qilib: (shx)'= chx, (chx)' - shx , (zftx) =—, (c//iv) =------------ ;—.

ch'x sh"x

21.2. Oshkormas funksiya va uning hosilasi

A vay o'zgaruvchiiar orasidagi funksional bog'lanish /$^{?}$(A'.y)=0 tenglama bilan berilgan bo'lsin. Agar qandaydir (a, Л) intervaida aniqlangan y=/U) funksiya mavjud bo'lib, u *F{x,y)=Q* tenglamani qanoatlantirsa, u holda y=_Дx) funksiya F(.x,y)~0 tenglama bilan aniqlangan **oshkormas** funksiya deyiladi. Funksiya y ~/(.r)

tenglik yordamida berilganda *y* oshkor ko'rinishda berilgan deyiladi. Oshkor ko'rinishda berilgan funksiyani *y-fljj-O* ko'rinishda yozilsa *y* oshkormas ko'rinishda berilganga o'tiladi. Funksiya F(x,y)=0 tenglama yordamida oshkormas shaklda berilganda tenglamani y ga nisbatan yechilsa funksiyaning oshkor ko'rinishdagi tcnglamasi hosil bo'ladi. Ammo bunday o'tish har doim ham oson bo'lavermaydi. ba'zan esa umuman o'tishning iloji bo'lmaydi.

Shuning uchun oshkormas funksiya hosilasini uni oshkor liolga keltirmasdan topish usuli bilan misollarda tanishamiz.

1- misol $x'+y^2=4$ tenglama bilan berilgan funksiyaning *y* hosilasini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani *y* ni *x* ning funksiyasi ekanligini hisobga olgan holdaл bo'yicha differensiallaymiz: $(x^-)'$ '+(y")'= 4'; *2x+2y./*=0,

x + y • v' = 0, bundan *y' y*

2- misol. y^4-4xy+x^4=0 tenglama bilan berilgan funksiyaning *y'* hosilasini toping.

Yechish. Differensiallaymiz: $4y^J$ • *y - 4(x'y* + x• y') + 4x' - 0; *y'* ■ *y'-y-xy'* = -y; , 5 v ,

5• , y-x'

(y-x)y=y-x, *y*

y - X

Biz kelgusida oshkormas funksiyaning hosilasini topishga yana qaytamiz. Shuning uchun bu yerda uni batafsil o'rganib o'tirmaymiz.

21.3. Funksiyaning parametrik berilishi va parametrik berilgan funksiyaning hosilasi

F = m (21.1)

tenglamalar berilgan bo'lsin. Bu yerda t *[7\,T₂*] kesmadagi qiymatlarni qabul qiladi. t ning har bir qiymatiga x va y ning aniq qiymatlari to'g'ri keladi. Agar *x* va *y* ni *Oxy* koordinata tekisligidagi nuqtaning koordinatalari deb qaralsa, u holda t ning har bir qiymatiga tekislikning ma'lum bir nuqtasi to'g'ri keladi. t ning qiymatlari T! dan T_2 gacha o'zgarsa, bu nuqta tckislikda hiror egri chiziqni chizadi. (21.1) tenglamalar ana shu egri chiziqning **parametrik tenglamalari** deyiladi, t parametr deyiladi.

Bu egri chiziq qandaydir *y=f{x)* funksiyaning grafigi bo'lsa, u holda y-/(.v) funksiya (21.1) parametrik tenglamalari yordamida berilgan deyiladi. x bilan y orasidagi bog'lash (21.1) tenglamalardan t ni yo'qotish orqali o'rnatiladi.

Faraz qilayiik, x = w(r) funksiya /- ф(x) teskari funksiyaga ega bo'lsin.

U holda *t* - Ф(X) ni (21. 1) ning ikkinchi tenglamasiga qo'ysak y ni x ning funksiyasi sifatida aniqlaydigan y=y[Ф(x)] yoki y=/x) tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib (21.1) tenglamalar qandaydiry /(x) funksiyani aniqlar ekan.

3- misol: $A'/_o$(xo ,yo) nuqtadan o'tib ?=т/+и/ yo'naltiruvchi vektorga ega to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari yozilsin.

Yechish. Bu to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi * ~ x,, = У ~ Уч m n

ko'rinishga ega ekanligi ma'lum. —_= m n = / deb belgilasak x-xo-mt,

y-y^nt yoki fx = x,, + mt, Л0 к»' = Уо + to'g'ri chiziq ning **parametrik** **tenglamalari** hosil

bo'ladi.

4- misol. < . , fx = RCost,
[y = RS int (0 < / < 2я, R > 0)

tenglamalar aylananing parametrik tenglamalari ekanini ko'rsatamiz. Tenglamalarni kvadratga ko'tarib qo'shsak

$$x^2 yy^2\text{--}R\sim cos^2 1+RSsin^2\wedge\text{-} R\backslash cos^2 t+sin^2 t)=P\wedge$$

yoki $x^2\wedge y^2\text{-}R^2$ hosil bo'ladi. Bu markazi koordinata boshida bo'lib radiusi R ga teng aylananing **kanonik tenglamasi** ekani ma'lum.

5- misol. < _ . . fx = acos/,
[y = /?sin t, (0 < t < 2/r. a > 0, b > 0)

tenglamalar ellipsning kanonik tenglamalari ekanini ko'rsatamiz. Tenglamalarni birinchisini *a* ga, ikkinchisini *b* ga bo'lib ularni

$$\frac{x}{a} = \cos /,$$

$$\frac{y}{b} \text{-sin/}$$

ko'rinishda yozamiz. Bu tenglamalarni kvadratga ko'tarib qo'shsak

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y'}{b}, \quad = cos\text{-}/+ snrr = I \text{ yoki } \frac{, i \bullet x^2}{a^2} \frac{y\sim}{e^2} \text{-1}$$

cllipsning kanonik tenglamasiga ega bo'lamiz.

6- misol. < , . , I x = *acht,*
[y - *bsht*

tenglamalar gipcrbolaning parametrik tenglamalari ekanini ko'rsatamiz (r/>0, 6>0).

Tenglamaning birinchisini *a* ga ikkinchisini *b* ga bo'lsak -- = <?/;/, ~ = *slu* hosil *a* *b* bo'ladi. Bu tenglamalarning kvadratga ko'tarib birinchi tenglamadan ikkinchisini hadlab ayirsak

•••- e/;7 *shi* I yoki -- -1 gipcrbolaning kanonik tenglamasiga
cr b *a' b~*

ega bo'lamiz.

Fazodagi egri chiziq ham xuddi tekislikdagi egri chiziq kabi parametrik tenglamalari yordamida berilishi mumkin.

$$\begin{cases} fx = <p(t), \\ b' = V'(t), \\ [X = Z/(t) \end{cases} \qquad (21.1')$$

tenglamalar berilgan bo'lsin. bunda *t e* [7j, Г,]. t ning bu kesmadan olingan har bir qiymatiga x, *y* va *z* ning aniq qiymati, ya'ni Oxy- fazoning aniq w(x;y;z) nuqtasi mos keladi. t ning qiymatlari *7* dan *Tг* gacha o'zgarganda M nuqta fazoda biror egri chiqni chizadi. (21. Г) tenglamalar fazodagi ana shu **egri chiqning parametrik tenglamalari** deyiladi. t o'zgaruvchi parametr deb yuritiladi.

fx = x„ + *mt,*

j У = К + «Л

[z = z() + *pt*

fazodagi to'g'ri chiqning parametrik tenglamasi ekanligini ko'rgan edik.

x = a cos *t,*

■ *y* = <7sin *t,*

z = bt

tenglamalar vint chizig'i deb ataluvchi egri chiziqning parametrik tenglamalarini ifodalaydi. Bu egri chiziq $x^2+y^2=a^2$ silindrda joylashgandir.

Endi parametrik tenglamalari H bilan berilcan funksiyaning hosilasini [y = y/(t) topish uchun formula chiqaramiz. yo(t), y/(/) funksiyalar differensiallashuvchi hamda x=^(t) funksiya /=0(x) teskari funksiyaga ega deb faraz qilamiz. U holda *y = y/(t), 1 = ф{x)* bo'lgani uchun *y x* ning murakkab funksiyasi bo'ladi, r-oraliq argument.

Shu sababli murakkab funksiyani hosilasini topish formulasiga binoan /=Т,Ч' (21-2)

bo'ladi. Teskari funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra

Shunday qilib. y_x =Д. (213)

x,

parametrik tenglamalari formulasini bilan berilgan funksiyaning hosilasini topish hosil qilamiz.

7-misol. x = a cos /, y = *b* sin/. y.v -?

Yechish. ' _ (ftsin/)' / (a cos/)' *boost* $\frac{b}{a}$ *clgl.*

8-misol x = *aebt,* y - *bsht.*

Yechish. *(bsht)' hchl b ,* / *(achf)'* ---- - ----- = —*cht.* *asht a*

9-misol ; x = *a cos ' l,* [y = <7 Sill /.

Yech ish. v = ——~ = ' (flsin¹/)' 3<7sin²/(sin/)' sin² /cos/ sin/ / *(acos'/У* 3<7cos'/(cos/) -cos'/sin/ cos/ ---4 = ; = - =

uchun buni (21.2)ga qo'ysak y_v

21.4. Hosilalar jadvali

$u = u(x)$, v = v(.r)-differensiyallanuvchi funksiyalar deb hisoblab asosiy elementar funksiyalarning hosilalari jadvalini tuzamiz va differensiyallash qoidalarini keltiramiz:

1) C' = 0; *C - const.*
2) / = 1, *x*- erkli o'zgaruvchi.
3) = aw$^{a\ 1}$ •«', *a = const.* 4) Xususiy holda (Vw) = —*u'* .
2yju

5) Xususiy holda | - I =—т

6) *(a")'- a" \na* ■ *u', a-const, a* > 0, *a* 1 . 7) Xususiy holda (e")' = *e" u'.*

8)(log,, *u)'* - —-— *u', a - const, a* > 0, a * 1.9) Xususiy holda (Ini/)' = — •»'.
u In *a* *u*

10) (sinw)' = cosw • «'.
11) (cosw)' = -sinu *u* .
12) (/gw)' =—^{1}~ *u* .
cos *u*
13) *(etgu)'* = —Д—
sin‘ *u*
14) (arcsinu)' =■ • *u'.*
sll-u^{2}
15) (arccosu)' = $-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ • *u'*
16) *(aretgu)'* --— ■ *u'.*
1 + гГ
17) ----------------- *(arcctgu)'* = —v ■ *u'* ■
1 + w
18) *(shu)' - chu* • *u* .
19) *(chu)' = shu* ■ *u* .
20) *(thu)'* = —5— »' -
clru
21) *(cthu)'* ----• *u'.*
sir u
22) *(u + v)' - u'± v'.*
23) *(u* ■ v)‘ - *u v + uv* .
24) *(Cu)'-Cu',* | *(* \ —• I = —, *C = const.*
|cj c
25) -1 = .
V J *v*^{2}
к
26) *y = f(u), u = u(x)* murakkab funksiyani hosilasi uchun $y_v = y_n u_,$. o'rinli.

27) /(.v) va x = v(y) o’zaro teskari funksiyalar uchun y_v =—70’rinli.

x,.

28) ($^{Л = 0(0}$’ bo’lsa y_v'=A-.

[У = !//(/) Д-

Izoh. v = [w(*)J^Н ko’rinishdagi funksiyaning hosilasini topish talab etilsa avval berilgan tenglikni *e* asosga ko’ra logarifmlab keyin tenglikni x bo’yicha diffcrensiallash ma’qul.

10-misol. *y - x'* funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. In *y - x*^{2} Inx; — ■ *y'* - 2x lnx + x^2 —, y' = y[2xlnx + x]

У *x*

yoki *y’* = lx^1"I =x'^2 x[21nx + l].

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. a) y = *sh*^{2}*x;* b) *y-th'x*^{2}*’,* d) *y* = In *shx',* e) *y - cos(chx)*
funksiyalarning hosilalarini toping?

Javob: a) v' - *2shxchx* - $Л2x; b) y' = *Gth'x~* ——-;d) y' = *cthx.e)* v' = -sin(c/?x)-s/jx. *ch x*

2. x’+y’-3axy = 0. y'topilsin. Javob: y* = -/ —.

y - *ax*

[y

3. Vx + 7*y* = -*Ja* . *y* topilsin. Javob: *y'* = -^~.

2/

n(x^2

4. y"-^i2- = 0- y'topilsin. Javob: y' =

x-y Javob: y" = 1-lna. y^2)-2xy'

5. a^x - e"’‘ 0. *y* topilsin.

6. л "1 + Г 3a/ V\. *v* - 3a/^{2} ; ■' topilsin. Javob: y' = —

I-/^{2} topilsin.

7. x = a(/ -sin/), y - a(l - cos/) ■ y_vJavob: y'-c/g|.

1-/ / 1 + /’ y —$^{2/}$--y / 1 + / ’ topilsin. Javob: y_v = 1.

9 _ $^{cos 1}$ Vcos2/ $y = \frac{\sin^2 t}{\sqrt{\cos 2t}} \cdot y_x$ topilsin. Javob: y_v = ~/g3x .

10. y = x^x• y' topilsin. Javob: y' = x‘(lnx +1).

11. y = (sinx)'*y* topilsin. Javob: y'- $(sinx)^v$(lnsinx+ xc/gx).

12. — -1 -^{1} - -- I bo’lsa j'(l) topilsin.

4 9

A)±V3 B)±— D)+ — E)±— F) ± —.

3 2 3 2

13. *e'+xy*^{2}*+y* = I bo’lsa y'(o) topilsin.

A) 2 B)-2 D) 3 E) 4 F)-3.

;л sin /. |30'|sa | topilsin
V = sin21 ' 4 J

A) 2 B)-2 D) 3 E)-3 F) 4.

|5. 1) (s/120)'= c/120 2) (cЛ20) = 5/120 3) (/Л4)'=-Д- c/r4 4) (c//15)'=-Д- .s7r4

tengliklardan qaysi noto'g'ri.

A) faqat 4-si B)faqat Iva 2 D) faqat 3 va 4 E) faqat 2;3;4 F) barchasi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Giperbolik funksiyalarni ta'riflang.
2. Giperbolik funksiyalarni hosilalarini topish formulalarini yozing.
3. Oshkormas funksiyani ta'rif)ang va uni hosilasini topish usulini misoliar yordamida izohlang.
4. Parametrik berilgan funksiyani ta'riflang va uni hosilasini topish formulasini yozing.
5. [1] ko'rinishdagi funksiyaning hosilasini topish uchun formula chiqaring.
6. Hosilalar jadvalini yozing.
7. DifTerensiallash qoidalarini yozing.
8. Aylananing parametrik tenglamasini yozing.
9. Ellipsning parametrik tenglamasini yozing.
10. Giperbolaning parametrik tenglamasini yozing.

22- **ma‘ruza. Mavzu: Funksiyaning differensiali. Yuqori tartibli hosilalar va differensiallar. Urinma va normal tenglamalari**

Reja:

1. Funksiyaning differensiali va uning geometrik ma’nosi.
2. Taqribiy hisoblashda differensialdan foydalanish.
3. Yuqori tartibli hosilalar.
4. Oshkormas funksiyaning yuqori tartibli hosilalari.
5. Parametrik berilgan funksiyaning yuqori tartibli hosilalari.
6. Yuqori tartibli differensiallar.
7. Ikkinchi hosilaning mexanik ma‘nosi.
8. Urinma va normal tenglamalari.

Adabiyotlar: 1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,13,14,15.

Tayanch iboralar: differensial, urinma, normal, oshkormas funksiya, parametrik funksiya, invariantlik.

22.1. Funksiyaning differensiali va uning geometrik ma‘nosi

(a;Z>) intervalda differensiallanuvchi *y- f(x)* funksiyani olamiz. U holda (a; Z>) dagi istalgan x uchun

/'(x)= lim — (22.1)
,\r-»o Дх

chekli hosila mavjud bo’ladi. Umumiy holda /'(x)*0 deb faraz qilinsa, (22.1) tenglikdan (16.5-teorema) — = /'(x)+a ekani kelib chiqadi, bunda lima = 0.

Ax Av-»0

Agar oxirgi tenglikni barcha hadlarini */\x* ga ko’paytirilsa

Ay = *f' (x*)Лx + *a/Sx* (22.2)

tenglik hosil bo’ladi. (22.2) dagi har ikkaia qo’shiluvchilar ham Ax->0 da nolga intiladilar. Ularni Ax bilan taqqoslaymiz:

lim —— = /'(x) - chekli son, lim —= lima = 0.
Ax-*0 Ду \v-*O Ду Av-M)

Shunday qilib (22.2) tenglikdagi birinchi qo’shiluvchi Ax bilan bir xil tartibli cheksiz kichik miqdor(funksiya), ikkinchi qo’shiluvchi a Ax esa Ax ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor. Bundan (22.2) formulada birinchi qo’shiluvchi /'(x)Ax asosiy ekanligi kelib chiqadi. Ana shu qo’shiluvchi **funksiyaning differensiali** deyiladi.

Funksiyaning differensiali *dy* yoki <7/'(x) kabi belgilanadi.

Demak, б/у = /'(x)Ar. (22.3)

Shunday qilib funksiyaning differensiali uning hosilasini argument orttirmasiga ko’paytirilganiga teng ekan. y^x bo’lganda y^x'-l bo’lib, *dy = dx=\ixx* yoki <&~Ar, ya‘ni erkli o’zgaruvchining differensiali uning orttirmasiga tengligi kelib chiqadi. Buni hisobga olsak (22.3) formulani

<7y -/'(x)rfx = y<7x (22.4)

ko’rinishda yozish mumkin. Bundan y’- ya’ni hosila funksiya differensialining *dx* argument differensialiga nisbati ekanligi kelib chiqadi.

(22.4) tenglikdan ko'rinib turibdiki funksiyani differensialini topish masalasi uning hosilasini topishga teng kuchli, chunki funksiyaning hosilasi erkli o'zgaruvchining orttirmasi z\x ga ko'paytirilsa funksiyaning differensiali hosil bo'ladi. Shunday qilib hosilalarga tegishli bo'lgan teoremalar va formulalarning ko'pchiligi differensiallar uchun ham to'g'ri bo'ladi.

Xususan, differensiallanuvchi *u* va v funksiyalar uchun differensiallash qoidalaridagi singari

d(u ± v) = *du* ± *dv, d(cu) - cdu, c - const, d(u* ■ v) = *vdu + udv* , *d*(*u*) – vz/w - *udv v)* v^2

formulalar to'g'ri bo'ladi.

1-rnisol. y = *tgx* funksiyaning differensialini toping, z/y =

y'dx - (tgx) dx =---------- —*dx* ■

cos* x

2-misoI. y = funksiyaning differensialini toping. *dy - y'dx*

Yechish. - *) dx* - e^x (x^2) *dx = <?' 2xdx.*

Endi differensialning geometrik ma'nosi bilan tanishamiz. r = /(•<) funksiya va unga mos egri chiziqni qaraymiz(105-chizma). Egri chiziqning *M(x, y)* nuqtasini olib shu nuqtada egri chiziqqa urinma o'tkazamiz. Urinmaning Ox o'qning musbat yo'nalish bilan hosil qilgan burchakni *a* bilan belgilaymiz. Erkli o'zgaruvchi x ga Ax orttirma beramiz, u holda funksiya *PN* = Лу /(л - Ax) -/(x) orttirmani oladi. Chizmadagi *&MPO*

PO = MPtga - tga ■ Ax Ammo hosilaning geometrik) dan $\frac{PQ}{MP}$ - *tga* yoki

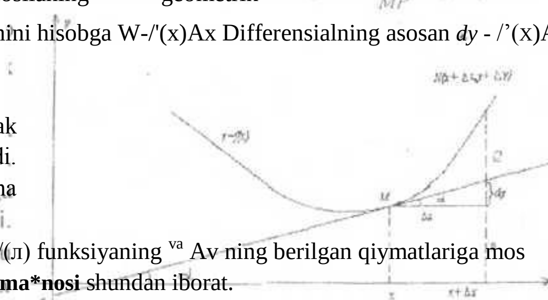
ma'nosiga binoan *tga = f'(x)* ekanini hisobga W-/'(x)Ax Differensialning asosan *dy* - /'(x)Av

olsak

bo'ladi.

ta'rifma

edi.



Shunday qilib, *PO = dy*. tenglik /(л) funksiyaning va Av ning berilgan qiymatlariga mos keluvehi differensiali ordinatasi **ma*nosi** shundan iborat.

22.2. Taqribiy hisoblashda differensialdan foydalan.'sh z/v = /'(x)Ax eka.'hni lim *a* = 0. Buni *dy P.3* bo'lsak Ar-H> IO5-c?izma. y

У-f(x) egri chiziqqa Л/(x,/(x)) nuqtada o'.'kazilgan orttirmasiga urinmaning teng ekanligini bildiradi. Differensi/dning **geometrik**

Yuqorida chiqarilgan (22.2) tenglikni °"Ьлу - hisobga

r/y-t (7A.V ko'rinishda yozamiz, bunda Ajj _, <zAx . .

....

cly~' + *~j~* yoki Ax —> 0 da limitga o'tsak

lim —— = 1 + Inn --— = ¹ +—7~x l*ᵐ ᵃ ~ ' +—n' 0 = 1 v-.o$_{Av}$ /'(x)^v^ /'(-*)

hosil bo’ladi. Shunday qilib *f'(x)* * 0 bo’lganda *dy* va Ay Av->0 da ekvivalent cheksiz kichik miqdoriar ekan. Demak, *\y » dy* yoki *&y* ® /’(x)Av.

Ay = /(x+Ax)-/(x) ekanini hisobga olsak /(x +Av)-/(x)«/’(x)Ax yoki bundan

/(x + Ax) ~ /(x) + /’ (x)Av (22.5)

hosil bo’ladi.

Bu formuladan foydalanib biror *x* nuqtada funksiyani va uning hosilasining qiymatini bilgan holda unga yaqin boshqa x + Ax nuqtada funksiyaning taqribiy qiymatini hisoblash mumkin. (22.5) tenglikda Av qanchalik kichik bo’lsa tenglik shunchalik aniq bo’ladi.

3- misol. (1 + Ar)" « 1 + иДх taqribiy tenglikning to’g’riligi ko’rsatilsin, bunda Ax etarlicha kichik son.

Yechish. /(x) = x" funksiyani qaraymiz. Bu holda Ay = (x + Ax)" -x", t/y = /7 x""'Av bo’lib (22.5) tenglikka ko’ra (x + Ar)"-x" « nx""Ar yoki (x + Ax)" « x" + их"'^{1} Axbo’ladi. Bungax=l qiymatni qo’ysak (1 + Ax)" «1 + »Av taqribiy hisoblash formulasiga ega bo’lamiz. Bunga asoslanib quyidagilarni hosil qilamiz:

1) (l,03)^5 = (1 + 0,03)^5 « 1 + 5 • 0,03 = 1,15 (Ax = 0,03, и = 5).

2) Jl,005 « 1 + - • 0,005 = 1,0025 (Av = 0,005, л = -).
2 2

3) JO/Ж = Vi-O-^{0}1^2 ~ ^{1} +1 -(-0,012) = 1 - 0,004 - 0,996. f Av = -0.012, *n* =

4) V267 = 4/2564-11 = ^256Г1+-— 1 = 4'Н + — «4f 1 + — —- -1 =
7 *У* V *256J }* 256 < 4 256)

V 7 I 256 4)

4- misol. cos6f' hisoblansin.

Yechish. /(x) = cosx funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uchun (2JL.5) formula cos(x + Av)»cosx-sin.vAv ko’rinishni oladi.

x = 60° = Ax = 1" = — = 0,01745 desak
3 180

cos 61' cos 60" sin60' -l" = -— 0,01745-0,4849 hosil bo’ladi.
2 2

22.3. Yuqori tar tibli hosilalar

(a. b) intervaida differensiallanuvchi y = /(.v) funksiyani olamiz. Bu funksiyani hosilasi /’(.v) funksiyaning hosilasi haqida gapirish mumkin.

1- ta‘rif. Berilgan funksiya hosilasidan olingan hosila (agar u mavjud bo’lsa) shu funksiyaning **ikkinchi tartibli hosilasi** yoki **ikkinchi hosilasi** deyiladi va y" yoki /"(.v) kabi belgilanadi: y"=(y')'~ /”(x).

Masalan, y = x’ bo’lsa, u holda y'=7x^6, y"=(7x^6) =7-6-x^5 =42x’.

2- ta'rif. Funksiyaning Ikkinchi tartibli hosilasidan olingan hosila shu funksiyaning **uchinchi tartibli hosilasi yoki uchinchi hosila** deyiladi va y"' yoki *f"(x)* kabi belgilanadi.

Masalan, y = x^4 bo'lsa, u holda y'=4x^1, _y"=(4x') = 12x^2, y'"=(12x^2) = 24x.

3- ta'rif. Funksiyaning (/7-1)-tartibli hosilasidan olingan hosila (agar u mavjud bo'lsa) shu funksiyaning //-tartibli hosilasi yoki //-hosilasi deyiladi jp^w yoki

kabi belgilanadi: y^M - ($y^{1"'11}$) = /"'(x).

Qonuniyatni saqlab qolish maqsadida w=0 bo'lgan xususiy hoida /$^{\{0}$\x) = /(x) deb olamiz, ya'ni nolinchi hosila funksiyaning o'ziga teng.

To'rtinchi, beshinchi va undan yuqori tartibli hosilalar Rim raqamlari bilan ham belgilanadi: $y^п$, p^1, ...

5- misol. j = sinx bo'lsa, topilsin.

Yechish. $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$y^{(,,)}$ = sin[x + /?--~j. Shunday qilib, $(\sin x)^w$ =sin[x + nyj.

= sin^x +102 -yj - sin(x + 51 • ?r) = sin(x ++ 50 • /r) = sin(x + zr)= - sin x.

- sin x.

6-misol. *y* = cosx bo'lsa, $y^{("'}$ topilsin. Yuqoridagi singari $(\cos x)'^{"1}$

Shu formulaga asoslanib sinx funksiyaning 102-hosilasini topamiz: $(\sin x)^{(,(C)}$

Demak, (sinx/^{1021} =

ekanini ko'rsatish mumkin.

Ba'zi-bir elementar funksiyalarning istalgan tartibli hosilalari uchun ham formulalar shunga o'xshash chiqariladi.

O'quvchiga *y* $e^x{}_r$*y* - x^l, y - *a*\ _y = Inx funksiyalarning //-tartibli hosilalari uchun formulalarni o'zi topishini maslahat beramiz. //-tartibli hosilalar uchun (w + v)$^{("*}$ = i/$^{(,,)}$ + $v^{1"'}$,

= $cu^{\{"\}}$ tengliklarning to'g'riligini isbotlash qiyin emas.

Shuningdek (wv)$^{1"*}$ = $U^{(H)}$v+"//$^{1""0}$v4 ^{7}——-——--$w^{("'2)}$v"+ + nv^w (22.6)

I 1-2

formulaning to'g'ri ekanligini ko'rsatish mumkin.

Bu yerdagi и = и(x), v = v(x) funksiyalar //-tartibgacha hosilaga ega bo'lgan funksiyalar. (22.6) formula **Leybnis formulas»** deb ataladi.

22.4. Oshkormas funksiyaning yuqori tartibli hosilasi

.V ning funksiyasi *y F{x.y) = 0* tenglama yordamida oshkormas shaklda berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning p' hosilasini topish usuli bilan misolda tanishgan edik. Lining yuqori tartibli hosilalarini topish usuli bilan ham misolda tanishamiz.

7- misol. ^т + ~^{y}—-1=0 tenglama bilan oshkormas holda berilgan *y a b~* л funksiyaning ikkinchi hosilasini toping.

Yechish. Oldin *y'* ni topamiz. *y* ni x ning funksiyasi ekanligini hisobga olib berilgan tenglamani differensiallasak + ■■ = *o* hosil bo’di. Bundan

cr b

y y' _ x . , b^2*x*. ?i_ -^{v} va ,i._ \$^{x}$ i _ b^2 *x'y-xy*
b~ a^2 ' ' *a'* ' ' a^2 y a^1 ^yJ a^2 y^2

b^2 x
, y + x , •
y" gatopilgan y ni qo yamiz: y"=— ,, *b'* ---------- ----- z- =—-• *a~ y b~ a'y'+b'x* .
a' y *cr a'y'*

Ammo -^--r~ = l tenglamadan Z>^{2}x^{2}+a^{2}y^{2} =a^{2}/>^{2} kelib chiqishini hisobga *cr b~* olsak ~~- yoki y"=—$_{r}$ ga ega bo’lamiz.
<7‘ *a'y'* ' *ay*

y'",)" > y'* va hokazo hosilalarni ham shunga o’xshash topish mumkin.

22.5. Parametrik berilgan funksiyaning yuqori tartibli hosilalari

x ning differensiallanuvchi funksiyasi *y* lx = p(/), l.v=И0 tenglamalar bilan parametrik berilgan bo’lsin, bunda x-«?(/) funksiya / = Ф(x) teskari funksiyaga ega. I) holday, hosila

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} \qquad (22.7)$$

formula yordamida topilishi isbotlangan edi. Ikkinchi hosila y_{w} ni topish uchun (22.7) tenglikni / x ning funksiyasi ekanini hisobga olib bo’yicha differensial laymiz.

$$y_{xx}'' = \left(y_x'\right)_x' = \left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)_t' \cdot t_x'$$

Shunday qilib $y_{t>}$

Bu yerda funksiyalar ikkinchi tartibgacha hosilalarga ega deb faraz qilindi.

y“, y" ■ .v’ va hokazo hosilalarni ham shunga o’xshash topish mumkin.

8- misol. ■ . lx = «cos/,
[y = osin/, *a - const*

parametrik tenglamalari yordamida berilgan x ning funksiyasi *y* ning ikkinchi hosilasini toping.

Yechish. $y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -ctg\,t$, $\quad y_{xx}'' = \frac{(-ctg\,t)_t'}{x_t'} = \frac{1}{a\sin^3 t}$

22.6. Yuqori tartibli differensiallar

Differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiyani differensiali $dy = f'(x)dx$ yana x ning funksiyasi bo'ladi. Shuning uchun bu funksiyaning differensiali haqida gapirish mumkin.

4- ta'rif. Funksiyaning differensialidan olingan differensial (agar u mavjud bo'lsa) shu funksiyaning **ikkinchi tartibli differensiali** yoki **ikkinchi differensiali** deyiladi va d^2y kabi belgilanadi.

Shunday qilib, $d(dy) = d^2y$.

5- ta'rif. Funksiyaning ikkinchi tartibli differensialdan olingan differensial (agar u mavjud bo'lsa) shu funksiyaning **uchinchi tartibli differensiali** yoki **uchinchi differensiali** deyiladi va d^3y kabi belgilanadi.

Shunday qilib, $d(d^2y) = d^3y$.

6- ta'rif. Funksiyaning $(n-1)$- tartibli differensialdan olingan differensial (agar u mavjud bo'lsa) shu funksiyaning **n-tartibli differensiali** yoki **n-differensiali** deyiladi va d^ny kabi belgilanadi.

Shunday qilib, $d(d^{n-1}y) = d^ny$.

Yuqori tartibli differensiallarni hosilalar orqali ifodalaymiz. $dx = \Delta x = const$ ekanini hisobga olib ikkinchi tartibli differensial uchun

$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = (y'dx)'dx = y''dxdx = y''(dx)^2 = y''dx^2$ ga ega bo'lamiz. Shunday qilib, $d^2y = y''dx^2$.

Bu yerda $dx^2 = (dx)^2$, ya'ni argument differensiali darajasini yozishda qavsni tashlab yozish qabul qilingan.

Shunga o'xshash uchinchi tartibli differensial uchun

$d^3y = d(d^2y) = d(y''dx^2) = (y''dx^2)'dx = y'''dx^2dx = y'''(dx)^3 = y'''dx^3$ tenglikka ega bo'lamiz. Demak, $d^3y = y'''dx^3$. Bu jarayonni davom ettirib, n-tartibli differensial uchun $d^ny = y^{(n)}dx^n$ formulani hosil qilamiz, bunda $dx^n = (dx)^n$.

Yuqori tartibli differensiallarni hisoblash uchun chiqarilgan formulalardan istalgan tartibli hosilani differensiallarning nisbati sifatida tasvirlovchi $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$, ..., $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Shu paytgacha $y = f(x)$ munosabatda x erkli o'zgaruvchi deb qaradik. Endi x oraliq argument bo'lgan holni qaraymiz, ya'ni $y = f(x)$ murakkab funksiyaga ega bo'laylik, bunda $x = \varphi(t)$. Murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasiga ko'ra $y_t' = y_x' \cdot x_t'$ bo'lgani uchun $dy = y_t'dt = y_x' x_t' dt = y_x' dx = y'dx$.

Shunday qilib $y = f(x)$ funksiyaning differensiali x erkli o'garuvchi bo'lganda qanday ko'rinishga ega bo'lgan bo'lsa u x oraliq argument ya'ni biror yangi o’zgaruvchining funksiyasi bo’lganda ham xuddi o’sha ko’rinishga ega bo’lar ekan. Birinchi tartibli diti'erensialning bu xossasi **differensial shaklning invariantligi** deb ataladi.

9- misol. y---sinV/ funksiyaning differensialini toping.

Yechish. V/ =x desak y = sinx murakab funksiyaga ega bo’lamiz. U holda

$$dy - y'dx = (\sin x)\, dx = \cos.wfr - \cos 41\, d41.$$

Murakkab funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali invariantlik xossasiga ega emasligini, ya‘ni $d^2y{*}y''dx^2$ ekanini ko’rsatamiz.

Qaralayotgan holda dr = <У^(/)= <p’(r)d/ekanini hisobga olib, ikkinchi differensial uchun $d^2y = d(dy) = d(y'dx) = dy'dx + y'd(dx) = y''dx^2 + y'd^2x$ tenglikka ega bo’lamiz.

Buni x erkli o’zgaruvchi bo’lgan holdagi $d^2y{-}y''dx^2$ bilan taqqoslab ularni tashqi ko’rinishlari o’xshash emasligini ko’ramiz. Boshqacha aytganda ikkinchi tartibli differensial invariantlik xossasiga ega emas ekan. Shunga o’xshash yuqori tartibli differensiallar ham invariantlik xossasiga ega bo’lmasligini ko’rsatish mumkin.

Invariantlik xossasi faqat birinchi tartibli differensiallar uchun o’rinli.

10- misoI. $y = tgx$ funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli differensiallarini toping, л-erkli o’zgaruvchi.

Yech ish. $dy = y'dx = (tgx)\, dx = \frac{\blacksquare}{\cos' x} - dx,$

$$d^2y - y''dx^2 - (\cos'^2 л)\, dx^2 = -2\cos'' x \blacksquare (\cos л)\, dx^2 = \frac{\wedge\sim}{\cos' x} dx.$$

11- misol. y = sin,v,x-e' murakkab funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli differensiallarini toping.

Yechish. $dy - y'dx - \cos x dx,\ d^2 y - d(y' dx) = y'' dx^2 + y'd^2x = -\sin x dx^2 + \cos x d^2x.$

22.7. Ikkinchi hosilaning mexanik ma‘nosi

To’g’ri chiziq bo’ylab harakat qiluvchi jismning o’tgan .$ yo’li bilan / vaqt orasidagi bog’lanish y = /(/) formula bilan ifodalansin.

Hosilaning mexanik ma‘nosiga binoan jismning oniy tezligi yo’ldan vaqt bo’yicha olingan hosilaga teng, ya‘ni v(z) -.<(/) = —-.

Biror / momentda jismning tezligi v ga teng bo’lsin. Agar harakat tekis bo’lmasa, u holda / paytdan keyin o’tgan \i vaqt oralig’ida tezlik Avga o’zgaradi.

- ,'2± nisbat Л/ vaotdagi **o’rtacha tezlanish** deyiladi.
"" Д/

O’rtacha tezlanishning vaqt orttirmasi M nolga intilgandagi liniiti berilgan momentdagi yoki oniy tezlanish deb ataladi: a = lim— - —.

& J 7 v-oД/ dt

Demak, oniy tezlanish tezlikdan vaqt bo’yicha olingan hosilaga teng. Ammo v = —■ bo’lgani uchun $_a$ =--(—} = — , ya‘ni **to’g’ri chiziqli harakat tezlanishi** dt $dtydt)$ dr **yo’Idan vaqt bo’yicha olingan ikkinchi hosilaga teng.** j = /(r) **ga asosan: a = /"(/)•**

Bu ikkinchi tartibli hosilaning **mexanik ma^{k}nosidir.**

22.8. Urinma va normal tenglamalari

Tenglamasi y = /(л) bo’lgan egri chiziqni qaraymiz, bunda *f(x)* differensiallanuvchi funksiya. Bu egri chiziqda Л/$_0$(x$_0$,y$_0$) nuqtani olamiz va bu nuqtada egri chiziqqa urinma o’tkazamiz. O’tkazilgan urinma *Oy* o’qqa parallel emas deb faraz qilib, uning tenglamasini yozamiz. Berilgan nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasiga ko’ra urinmaning tenglamasi

T-Л =

ko’rinishga ega bo’ladi. Hosilaning geometrik tna‘nosiga binoan *k = f'(x$_0$)* bo’lgani uchun urinma tenglamasi *y-*

ko’rinishni oladi, bunda y$_{()}$ = /(.r$_0$).

7-ta‘rif. Urinish nuqtasidan o’tadigan va urinmaga perpendikulyar to’g’ri chiziq egri chiziqqa berilgan nuqtada **normal** deb ataladi(l 06- chizma).

Ta'rifdan qaralayotgan nuqtada egri chiziq urinmaga ega bo’lmasa u normalga ham ega bo’lmasligi kelib chiqadi. /'(л-) hosila mavjud bo’lmaganda egri chiziqqa uning A-/(A-;/(X)) nuqtasida *Oy* o’qqa parallel bo’lmagan urinma o’tkazib bo’lmaydi.

Endi normalni tenglamasini yozamiz.

Ikki to’g’ri chiziqning perpendikulyarlik shartiga ko’ra normalning burchak koeffitsientini ij *k,,* urinmaning burchak koeffitsienti A = /‘(A$_0$) bilan

106-chizma.

* /’(л-$_0$)

tenglik orqali bog’langan.

Demak, y = /(л) egri chiziqqa Л/$_0$(л-$_ц$.y$_0$) nuqtasidagi normal tenglamasi

T-To = —777—(*-*o)
/ (x$_0$)

ko’rinishga ega.

12- misol. y = л-^{4} egri chiziqqa uning T/„(l; 1) nuqtasida o’tkazilgan urinma va normalning tenglamalari yozilsin.

Yechish. V’=4A' bo’lgani uchun urinmaning burchak koeffitsienti .»‘i$_{til}$-4-! = 4 ga teng. Demak, urinma tenglamasi: y-1 = 4(л-1) yoki y = 4л-3.

Normal tenglamasi: y-1 = --(л-1) yoki y---.v+^{5}-.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

Funksiyaning differensiallari topilsin.

1. *y = y[a~* i .v' . Javob: *dy* -- -- ~*Л* *dx*. **2.** *y* = $e^{a,c,sx}$. Javob: *dv* = -—-*dx*.
2da˙+*x'* l + x'

3. *y* = (arcsin x^2 $)^5$. Javob: *dy* = -*A*—*dx* . **4.** *y* = —*tg'x* + *tgx*. Javob: *dy* - —— *dx*. *yj\-x** 3
cos x

5. *y*= 2/' + $3x^2$ +4.v + 5. y" topilsin. Javob: 6(2x + l).

I— 132 $-^{19}$ 1
6. y = Vx' • У" topilsin. Javob: —x ^{7}.7. *y*- ?/7sinx ./"topilsin. Javob:2crgx——.
343 sin" x

8. y-a^v. topilsin. Javob: (9?a)"a'.
9. *y*-fz?(l + .v). $y^{(,,)}$ topilsin. Javob: $(-l)^{11-1\ 1\ 2}$ ——.
(1 + A')"

10. $\mathbf{y^2}$ **= 4ox.** *dx*- ^-Vtopilsin.Javob:-—— y^2 **.11** .b^2x^2 + a^2 $\mathbf{v^2}$ - a^2b^2 - **0 .** topilsin. Javob: 0. *dx*˂ topilsin.Javob: $\frac{3b^6x}{a^4y^5}$
dx'

12. *y--2xy* - 0. -—topilsin. Javob: 0. **13.** $j^{л\ /k}$
dx' [y - a/ topilsin. Javob: 0.
[bJ. *dx'*
[x = sin2r, *j-y* , ... L l J l + z'
14. $\{y = \sin^2 t$ $\frac{}{dx^2}$ topilsin.Javob: $\frac{}{\cos^3 2t}$. 15. $\{y$ _2t_ ' 1 + /
16. 1)J4,012 ; 2) .; _ ; 3) -=£=; 4)
Vo.9843 ifodalar $(1 + Ax)"$ = 1 + *лДх*
formuladan
y'4,028 71,002
foydalanib hisoblansin. Javob: I)2,003;2)0,498;3)4,997;4) 0,995

17. x ning 3O'T3O(,2'; 30l"3' qiymatlarida y = sinx funksiyaning qiymatlari jadvali yozilsin, bunda l'=--------- = 0,00029. Javob: 0,50025; 0,50050; 0,50075.
180-60

18. ln2,001 hisoblansin. Javob: 0,69365.

19. Leybnis formulasidan foydalanib y = e^{4v}sin3x funksiyaning beshinchi hosilasi topilsin. Javob: -e^{4v}(3116sin3x + 237cos3x).

20. y = A-COS.Y . /" topilsin. Javob: 4^2 $_e$' cosfx + ~zr

21. s - Jsin((y/ + *<p)* qonuniyat asosida garmonik tebranma harakat qilayotgan jismning oniy tezlanishi topilsin. Javob: *-co*^{2}*s*.

22. Jism x = Ле'^{1}'sinr-я qonuniyat asosida so'nuvchi tebranma harakat qilayotgan bo'lsa, lining oniv tezlanishi topilsin. Javob: —— = -(rr i A'^{2})x-2/cv v-tezlik.
h *di~*

23. *y* = x' ~$3x^2$ -x + 5 egri chiziqqa uning Л/(3; 2) nuqtasida o'tkazilgan urinma va normal tenglamalari yozilsin. Javob: urinma: 8x-y-22 = o; normal: x + 8y ■ 19-0.

24. x^2+y^2=52 aylanaga 2x + 3y-6 = 0 to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan urinmalar tenglamalari yozilsin. Javob: 2x + 3y±26 = 0.

25. y^2 - 20x parabolaning qaysi nuqtasida o'tkazilgan urinma 0л o'q bilan 45" burchak tashkil etadi. Javob: (5; 10).

26. v = l^n^;\ bo'lsa rfy topilsin.

B) — D)-^— E)-^— F)-^-.

^{7} x(x + 5) x + 5 x' + 6x x+5x 2x + 5

27. 1п754,3175 ekanini bilgan holda In 73 jadvalsiz taqriban hisoblansin.

A) 4,2908 B) 4,2712 D) 4,2613 E) 4,2819 F) 4,2514.

28. *y = cosax* bo'lsa j/^{12}' topilsin.

A) a^{12} sin ax B)a^{l2}cosax D)-a^{l2}sinax E)-a^{i2}cosax F) a$^{!2}$sinx.

29. x - acos2/, *y* - Z>sin^2/ bo'lsa topilsin.

A) - B) 0 D) *abctg2t* E) — *tg2t* F) —*ctg2t.*

2a *b* *2a*

30. 4x^2-9j'^{2}=36 giperbolaning qaysi nuqtasida o'tkazilgan urunma 2j? + 5x = 10 to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'ladi?

A)(3л/2;2) B)(-зT2;2) D) (3л/2; — 2) E) (-3л/2; 2) F) bunday nuqta yo'q.

31. *y* ~ |sinx| funksiyaning grafigiga uning *(кя; 0)* nuqtasida nechta urunma o'tkazish mumkin, bunda *ке7.* .

A) 2 B)3 D)1 E) 4 F) urinma o'tkazib bo'lmaydi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Funksiyaning differensiali deb nimaga aytiladi?
2. Funksiyaning differensiali va hosilasi orasida qanday bog'lanish bor?
3. Funksiya differensialining geometrik ma'nosi nimadan iborat?
4. Differensialdan foydalanib taqribiy hisoblash formulasini yozing.
5. Funksiyaning л-tartibli hosilasi deb nimaga aytiladi?
6. Leybnis formulasini yozing.
7. Oshkormas funksiyaning yuqori tartibli hosilalari qanday topiladi?
8. Parametrik berilgan funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari qanday topiladi?
9. funksiyaning //-tartibli differensiali deb nimaga aytiladi?
10. Yuqori tartibli differensiallar va hosilalar orasida qanday bog'lanish bor?

11 .Differensial shaklining invariantiik xossasi nima? U nechanchi tartibli differensiallar uchun saqlanadi?

'2.Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosini ayting.

13.Egri chiziqqa urinma va normal tenglamalarini yozing.

23- nia'ruza. Ma vz u: D i ffc r e n s .< a 11 a nil v c h i f u n ks i y a 1 a r haqida ha'zi teorcfnalar

Reja:

1. Ferma teoremasi.
2. Roll teoremasi.
3. Lagranj teoremasi.
4. Koshi teoremasi.

Adabiyotlar: 1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,13,14,15.

Tayanch iboralar: uzluksiz, hosila, eng katta qiymat, eng kichik qiymat, orttirma, urinma, vatar.

23.1. **Forma teoremasi.** (a; *b)* intervalda aniqlangan y = /(>•) funksiya shu intervalning biror nuqtasida eng katta va eng kichik qiymatlaridan birini qabul qilsin. U holda funksiya shu nuqtada hosilaga ega bo'lsa funksiyaning hosilasi nolga teng bo'ladi.

Isboti. Aniqlik uchun funksiya (a; 6) intervalning *x~c* nuqtasida o'zining eng katta qiymatiga erishadi va /(c) = AY deb olib /'(c) = 0 ekanini ko'rsatamiz.

Hosilaning ta'rifiga ko'ra /'(c) - lim .
O Дд-

c nuqtada funksiya eng katta qiymatiga ega bo'lganligi sababli istalgan musbat yoki manfiy Av uchun /(c)>/(c + Ax) yoki /(c + Ax)-/(c) <0 bo'ladi.

Bundan, Av>0 bo'lganda —*-1^1* < o bo'lib,
Ar

/'(c) = lim ^c + '^x-—< o kelib chiqadi. Acar Ar <0 bo'lsa [1] > 0 va
AV-»O Ar Av

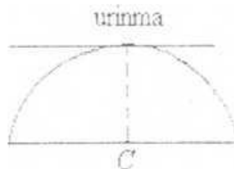
/'(c)- lim>0 kelib chiqadi. Shundav qilib *f(c)* hosila musbat ham
\r-»0 Дд-

bo'laolmaydi va manfiy ham bo'laolmaydi. Demak,
/'(c) = 0. Ferma teoremasiga quyidagicha \

geometrik izoh berish mumkin. *? У*

f(c)-0 tenglikdan hosilaning geometrik ma'nosini hisobga oisak *tga-0* yoki cr = 0 kelib chiqadi, bunda *a y* = /(.v) egri chiziqqa Л/(c; /(c)) nuqtasida o'tkazilgan urinmaning Ox ~~ o'qning musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagi.

Demak, egri chiziqning Л/(c: /(c)) nuqtasida o'tkazilgan urinma Ox o'qqa parallel bo'lar ekan (107-chizma).



107-chizma.

23.2. **Roll teoremasi.** Agar y = /(x) funksiya [<z/?] kesmada uzluksiz, (o;6) intervalda differensiallanuvchi, kesmaning oxirlarida nolga teng (/(o) = f(Z>) = 0) qiymatlarm qabul qilsa, u holda *(a;b)* intervalda kamida bitta *x=c* nuqta mavjud bo'lib unda hosila nolga teng, ya'ni /'(c)-o bo'ladi.

Isboti. Shartga binoan /(x) funksiya [<?; />] kesmada uzluksiz bo'lgani uchun u shu kesmada o'zining eng katta *,\f* va eng kichik *in* qiymatlarini qabul qiladi(18.5- teorema).

Agar .W-/77 bo'lsa /(.v) funksiya [c; Z>] kesmada o'zgarinas bo'lib uning hosilasi /'(.v) kesmaning barcha nuqtalarida nolga teng bo'ladi. *M* z *m* bo'lsin.

U holda /(«) = /(6) - 0 bo'lgani uchun *m* va *M* dan kamida bittasi, masalan A/zO bo'ladi. Funksiya x=c nuqtada o'zining eng katta Л7 qiymatiga erishsa bu

nuqta [a; *b]* kesmaning ichki nuqtasi bo’ladi, chunki kesmaning oxirlarida = /(/>) = 0. Demak, Ferma teoremasiga binoan /'(c) = 0 kelib chiqadi.

Bu teoremaga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. 'leoremaning shartlari bijarilganda *(a,b)* intervaida kamida bitta x=c *(a<c<b)* nuqta topilib $_v$ = /(x) egri chiziqqa uning Л7(c;/(c)) nuqtasida o’tkazilgan urinma Ox o’qqa parallel bo’ladi.

1-misol. /(x) = cosx funksiya kesmada Roll teoremasi unga qo’ygan

Г 3 q

barcha shartlarni qanoatlantiradi. Bu funksiyaning /'(x) = -sinx hosilasi kesmaning л -*л* nuqtasida nolga teng. Demak, /(x) = cosx egri chiziqqa Л/(л-;-1) nuqtasida o’tkazilgan urinma Ox o’qqa parallel bo’lar ekan.

1-izoh. /(x) funksiya *(a;b)* intervalning aqalli birorta nuqtasida hosilaga ega bo’lmaganda funksiyaning hosilasi *(a;b)* intervalning hech bir nuqtasida 0 ga aylanmasligi mumkin.

Masalan, /(x) = l-Vx^2 funksiya [— 1; 1] kesmada uzluksiz va kesmaning

chctlarida /(-!) = /(l) = 0. Ammo v’=—-7= 2 hosila (-1; 1) intervalning hech bir

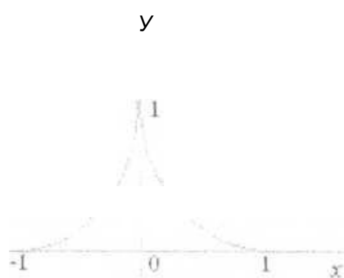
3уд$^{-2}$

nuqtasida 0 ga aylanmaydi. Buning sababi funksiyani hosilasi x~0 nuqtada mavjud emas. Bu holda [-1; 1] kesmada Ox o’qqa parallel urinma mavjud bo’lmaydi (108-chizma).

2-izoh. Roll teoremasi /(a) - *f(b)* shall bajarilganda ham o’z kuchini saqlaydi.

23.3.Lagranj teoremasi (chekli orttirmalar haqida). Agar y- /(x) funksiya [a; b] kesmada uzluksiz, *(«; b)* intervaida differensiallanuvchi bo’lsa, u holda *(a: b)* intervaida kamida bitta x-c *(a<c<b)* nuqta topilib bu nuqtada

/(Z>)-/(a)-/'(c)(/>-a) (23.1) tenglik bajariladi.



108-chizma.

Isboti. A'(.v) - /(x) - /(<7) — ——- ■ (A- - *a) (b^a)* yordamchi funksiyani

b- a

qaraymiz. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi, ya‘ni u [<x *b]* kesmada uzluksiz, («. />) intervaida differensiallanuvchi va

F(a) = /(a) - /(a) - (o - a) = 0,

b-a

F(b) = fib) - f(a) -

b - a

Shu sababli Roll tcoremasiga ko’ra (a; *b)* intervalda kamida bitta *x-c* nuqta mavjud bo’lib, unda /"(c) = 0bo’ladi. F'(A) hosilani topamiz:

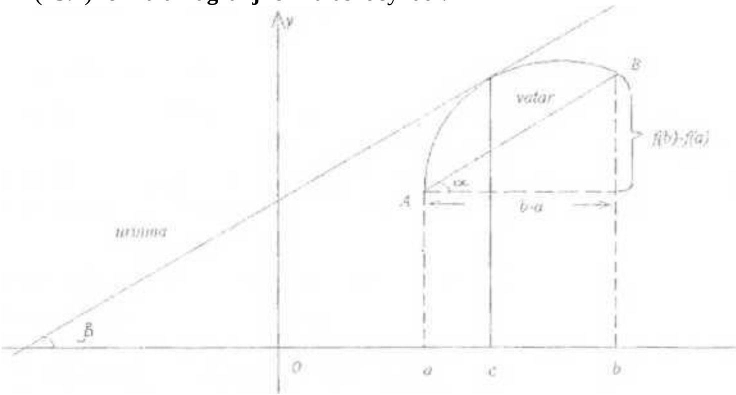
$F\backslash x) =$. Demak x c da F'(c) =/'(c)-—= 0.

b-a *b —a*

Bundan /(c) =yoki /(/>)-/(<?) =/’(c)(/>-a).

b - a

(23.1) formula **Lagranj formulasi** deyiladi.



109-chizma.

Lagranj formulasining geometrik ma‘nosi bilan tanishish maqsadida Lagranj formulasini —-- = /’(c) ko’rinishdayozamiz.

b-a

109-chizmadan —^--- = *iga* ekani ko’rinib turibdi, bunda *a* burchak AB

b-a

vatarning og’ish burchagi. Ikkinchi tomondan, *f\c) = tgp,* bunda //-abssissasi *c* ga teng nuqtaday = /(.v) egri chiziqqa o’tkazilgan urinmaning og’ish burchagi.

Lagranj teoremasiga ko’ra *tga ~ tgP,* bundan *a = p* ekani kelib chiqadi. Demak. egri chiziqda kamida bitta nuqta mavjud bo’lib, bu nuqtadagi egri chiziqqa urinma AB vatarga parallel bo’ladi. Bu Lagranj teoremasining **geometrik** ma‘nosi.

Endi Lagranj formulasining boshqacha ko’rinishi bilan tanishamiz. *a* = x, *b - x vi\x* deb olamiz.

U holda Lagranj formulasi

/(л + ДА)~ /(л)-/'(c)Дл ko’rinishga ega bo’ladi, bunda c .v bilan лAv orasidagi qiymat. Agar c ni c-.r + 6Av ko’rinishida tasvirlasak, bunda *()<0*< 1 Lagranj formulasini f(.v + Av) /(.v)- f'(x ı (7\v)Av, fle(OJ) ko’rinishda yozish ham mumkin.

Agar /(<?)- *f(b)* bo’lsa (23.1) Lagranj formulasidan /'(c) = 0 kelib chiqadi. Bu Roll teoremasi Lagranj teoremasining xususiy holi ekanligini ko’rsatadi.

O’zgarmas funksiyaning hosilasi nolga tengligi isbotlangan cdi. Lagranj teoremasidan foydalanib teskari tasdiqning ham to’g’riligini ko’rsatish mumkin.

23.4. -teorema. Agar *[a;b]* kesmada uzluksiz /(x) funksiya *(a;b)* intervaida 0 ga teng /'(A) hosilaga ega bo’lsa, u holda u [c; б] kesmada o’zgarmas bo’ladi.

Isboti. *x*- [a;/?] kesmaning *a* dan farqli ixtiyoriy nuqtasi bo’lsin. Lagranj formulasi (23.1) ni [c;;x] kesmaga qo’llab /(x)-/(a) =/'(c)(x-or) tenglikni hosil qilantiz, bunda *c a* bilan x orasidagi qiymat. *c* [a; *b]* kesmaga tegishli bo’lganligi uchun shartga ko’ra /'(c)=0. Shuning uchun /(.v)-/(c) = 0 yoki *f(x) = f(a).* Ya‘ni [a; *b]* kesmaga tegishli istalgan x uchun /(x) bir xil

$/(a) = const$ qiymatni qabul qiladi. Demak, u L; fc] kesmada o'zgarmas.

Natija. Agar Φ(x) va /'(x) funksiyalar [«;/)] kesmada teng hosilalarga ega bo'lsa, u holda ularning ayirmasi shu kesmada o'zgarmas bo'ladi. Ya'ni Φ'(x)- F'(x) bo' Isa Φ(x) - /-"(x) - C bo' ladi, bunda C = *const.*

Isboti. /(x) = Φ(x)-Л'(x) bo'lsin. U holda shartga ko'ra Φ'(x) = F'(x) bo'lganligi sababli /'(x) = Φ'(x) -/-'(x) = 0 bo'ladi. Shuning uchun hozirgina isbotlangan teoremaga binoan /(x)-Φ(x) /*'(x) funksiya [<?; Z>] kesmada o'zgarmas bo'ladi.

Bu teoremadan hamda uning natijasidan keyinchalik foydalaniladi (masalan, boshlang'ich funksiya tushunchasida).

2- **misoi.** $y = x^2$ parabolaning qaysi nuqtasida o'tkazilgan urinma uning л(-1; l) va я(3;9) nuqtalarini tortib turuvchi vatariga parallel bo'ladi.

Yechish. c/ = -l, 6 = 3, $/(x) = x^2$ va $/(a) = (-l)^2$-1, $/(Z>) = 3^2 =9$.

/(6)-/(a) = /'(c)(6-a) Lagranj formulasiga tegishli qiymatlarni qo'yib tenglamadan c ni topamiz: 9-1 -2c(3 + l); 8~8c; c-1.

Demak, parabolaning (1; 1) nuqtasida o'tkazilgan urinma AB vatarga parallel bo'iar ekan.

23.5. Koshi teoremasi. Agar ikkita /(x) va g(x) funksiya [c; *b]* kesmada uzluksiz, *(a,b)* intervaida differensiallanuvchi bo'lib g'(x) hosila intervalning hech bir nuqtasida nolga teng bo'lmasa, u holda (a; *b)* intervaida kamida bitta x-c *(a<c<b)* nuqta mavjud bo'lib unda

$$\frac{- J\backslash a)}{g(6)\sim g(o)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (73?)$$

tenglik bajariladi, bunda *g(a) Φ g(b).* (23.2) **Koshi formulasi** deb ataladi.

Isboti. (Teoremaning isboti).F(x) = *(f{b)*-/(c/))g(x) ~(g(6)--g(c))/(x) yordamchi funksiya Roll teoremasining shartlarmi bajarishiga asoslangan. leoremaning isboti Lagranj teoremasining isbolini lakiorlagani uchun uni tekshirib ko'rishni o'quvchiga qoldiramiz.

Lagranj teoremasi Koshi teoremasining g(x)- x bo'lgandagi xususiy holidir.

3-misol. /(x)-л' va $g(Y)\text{-}v^2$ funksiyalar uchun Koshi formulasi yozilsin va c topilsin.

Yechish. $/'(x) = 3.v^2$, g'(x) = 2x, /(/>)-/>", *g(b) = b'.* g(c) - c/?,

$/'(c) = 3c^2$, g'(c) = 2c bo'lgani uchun

g(6)-g(c) g'(c)

Koshi formulasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

b'-a' 3e^2. (б-a)(б^2+6a + a^2) 3

$b^1 - a^1$ $2c$ ' (b- $a\b$ + a) 2

„ ' $2\b^2 +ba + a^2)$

B и nd an, c = ——7 r—^{z}.

3(6 + a)

Mustaqil yechish uchun mashqiar va test savollari

1. Nima uchun y = |sinxj egri chiziqqa abssissasi kesmaga tegishli nuqtasida o’tkazilgan urinmalarning hech biri Ox o’qqa parallel bo’lmaydi? Bu yerda Roll teoremasining qaysi sharti bajarilmaydi?

2. $f(x) = x^2$ parabolaning qaysi nuqtasida o’tkazilgan urinma $a^2)$ va $b(b', b^2)$ nuqtalarini tortib turuvchi vatarga parallel bo’ladi? Javob: -$^+$-; (b+ к ^{2} (b+ }^{2}У I ^{4})

3. /(x) = Vx funksiya uchun [4:9] kesmada Lagranj formulasi yozilsin va c topilsin. Javob: c = -|.

4. Nima uchun [~2;l] kesmada — funksiyaga Lagranj teorcmasini qo’llab bo’lmaydi.

$$c=\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}}$$

6. $sinx$ va $cosx$ $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ oraliqda Koshi formulasi yozilsin va c topilsin. Javob: ^{c} = “-

5. /(x)- arcsinx funksiya uchun [0; l] oraliqda Lagranj formulasi yozilsin va c topilsin. Javob:

7. [0,1] kesmada berilgan /(x)=x‘ funksiyaning grafigiga abssissasi qanday nuqtasida o’tkazilgan urinma grafikni oxirlarini tortib turuvchi vatarga parallel bo’iadi. funksiyalari uchun

A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ D) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ E) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ F) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

8. [1,4] kesmaning qaysi nuqtasida y = x^2-5x + 4 egri chiziqqa o’tkazilgan urinma Ox o’qqa parallel bo’ladi.

A) 1,5 B) 2 D) 2,5 E) 3 F) Ox o’qqa parallel urinma mavjud emas.

9. [o,x] kesmaning qaysi nuqtasida y-sin x egri chiziqqa o’tkazilgan urinma Ox o’qqa parallel bo’ladi

A) £ B) - D) - E) - F) —.
6 4 3 2 3

10. Absssissasi qanday nuqtada y - Inx egri chiziq urinmasi /W,(l;0) va iV/,(e;l) nuqtalarni tortib turuvchi vatarga parallel bo’ladi.

A) e-l B) e-- D) - E) 1,6 F) 1,7.
2 2

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

1. Ferma teoremasini ayting.
2. Ferma teoremasining geometrik ma‘nosini ayting.
3. Roll teoremasini ayting.
4. Roll teoremasininggeometrik ma’nosini ayting.
5. Lagranj teoremasini ayting.
6. Lagranj teoremasining geometrik ma‘nosini ayting.
7. Koshi teoremasini ayting.
8. Roll teoremasi qaysi teoremaning xususiy holi?
9. Lagranj teoremasi qaysi teoremaning xususiy holi?
10. Teng hosilaga ega bo’lgan funksiyalar haqida nima deyish mumkin?

24- Ma‘ruza. Mavzu: Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidasi

Reja:

1. ko’rinishdagi aniqmaslik.
2. —- ko’rinishdagi aniqmaslik.
co
3. co-oo ko’rinishdagi aniqmaslik.
4. 0-o? ko’rinishdagi aniqmaslik.
5. L ko’rinishdagi aniqmaslik.
6. 0” ko’rinishdagi aniqmaslik.
7. oт" ko’rinishdagi aniqmaslik.

Adabiyotlar: 1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,13,14,15.

Tayanch iboralar: aniqmaslik, aniqmaslikni ochish, ajoyib limitlar, hosila.

Limitlarni hisoblashda -, —, O-oo, 0°, Γ, co” ko’rinishdagi ifodalarga
0 co
duch kelinadi. Bular aniqmasliklar deb yuritiladi. Bu ko’rinishdagi limitlarni hisoblash **aniqmaslikni ochish** deyiladi. Fransuz matematigi Lopital taklif etgan qoidaga amal qilinsa aniqmaslikni ochish (limitni hisoblash) ancha osonlashadi. Bu qoida qo’yidagi tcoremalarda o’z aksini topgan.

24.1. ko’rinishdagi aniqmaslik

24. 1-teorema. Agar /(x) va ^(x) funksiyalar x--<7 nuqtaning biror atrofida uzluksiz, *a* nuqtaning o’zidan tashqari shu atrofda differensiallanuvchi bo’lib, shu

atrofda <p(x)#0 va *(p(cГ>* = *f(a)* = Ohamda chekli yoki cheksizlim •— - = Л limit *tp(x)* $f^1(v)$ i • •
mavjud bo'lsa, u holda lim — ' ^(x) limit ham mavjud bo'ladi va

tenglik o'rinli bo'ladi

Isboti. = <?(x) «X*) - nisbatni qaraymiz.*cp(a)~0* bo'lgani uchun
bu tenglik to'g'ri.

Agar л *a* nuqtaning atrofiga tegishli bo'lsa, u holda yuqoridagi nisbatning o'ng tomoniga Koshi teoremasini qo'llasak

<p(x) <p\c)

kelib chiqadi, bunda *c a* bilan *x* orasidagi qiymat bo'lgani uchun *x-*a* da *a*. Shu sababli oxirgi tenglikda *x a* da limitga o'tsak lint zw=ii„, £<£>=!„„ £w=|im '•-e </?(x) *<p\c)* *<p'(c}*

<?'(x)

isbotlanishi lozim bo'lgan tenglik hosil bo'ladi.

1-eslatma. Agar /(a) = 0, *<p{a)=Q* va /(x) hamda <7>(x) hosilalar 24.1-teorema shartlarini qanoatlantirsa, u holda teoremani <p'(x) nisbatga ikkinchi marta qo'llash mumkin. Ya'ni: lim —x-=lim = — — va hokazo.
4»(x) *q>\x}* *<p\x)*

1 -misol. lim f- sinxfOA -----l - =hm -—- = lim (sinx)' .. cosx ----------------cosO=l.
X < 0; *x* l

2-misol. lim—— x'' <0j “lim------------ —= lim---------- ;— — = .. (x-sinx)' l -cosx *(0*j -o /Й -o 3x* yoj

(1-cosx)' sin>- 1 sinx
- ------ ----_]im -------|ini-----------
(3x*)' '-*0 6x 6 -'-'0 x

2-eslatma. 24.1-teorema x —>
to'g'riligicha qoladi, ya'ni

iimZ«=iimZV)
T-x <p(x) <p'(x)

almashtirish olib ishonch hosil qilish mumkin.

3-misol. $$\frac{tg\frac{2}{x}}{\frac{3}{x}}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{2}{x}}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)'}{\left(\frac{3}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{2}{x}}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{3}{x^2}}=\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\cos^2\frac{2}{x}}=$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2 0}=\frac{2}{3}$$

4-misol. lim $\frac{x^n - a^n}{x^m - a^m}$ $\left(\frac{0}{0}\right) = \lim \frac{(x^m - a^m)'}{(x^n - a^n)'}$ $\frac{ma^{m-1}}{na^{n-1}} = \frac{m}{n}$

5-misol. lim ~4 »--i x -2x **x³--5x²+2x+8** **16r +2x+15y0j** **(x³ -5x² +2x+8)'**

3x² -1 (k+2 __ 3 • 1 -10-(-1)4-2 _ j_5 _ 5
“ⁿ 4?-6x² -32x+2 ⁻ 4• (-1) - 6• 1 -32- (-1)+2 ⁻ 24 ~ 8 ’

24.2. — ko’rinishdagi aniqmaslik
CO

Ushbu teoremani isbotsiz keltiramiz.

24.2-teorenia. Agar Дx) va *<p(x)* funksiyalar *x=a* nuqtaning biror atrofida uzluksiz, differensiallanuvchi (x *a* nuqtaning o’zidan tashqari) bo’lsa hamda shu atrofda <p(x)/0, lim^-v)-*», lim <p(x)=<» bo’lsa va chekli yoki cheksiz lim 2_^- .r-.K ^'(д-) / (v) limit mavjud bo’lsa, u holda lim A_L_*L* limit ham mavjud bo’ladi va *<p(x)*

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

tenglik to’g’ri bo’ladi. Bu tcorema x -> <»da ham o’z kuchini saqlaydi.

I

6-misol. lim ~T~ Inxf«Л (Inx)' _ л — lim ~~ lim ", - lim (—x) = 0.
I y CO *J* r-»+0 / | \ 1
Ы

Inxf CO A lim — = lim

7-misol.

8-misol. lim e˙ t «JI — — - lim —- — = lim “T? X"(coJ r-»+x (e˙Y lim e' — = 4-co
2x\coj vx* (2x)

— X v-..x

3-eslatma. lim —~ = lim ^(x) ■'-»« *cp\x}* tenglikning o’ng tomonidagi chekli yoki cheksiz limit mavjud bo’lsa uning chap tomonidagi limit ham mavjud bo’ladi. O’ng tomonidagi limitning mavjud bo’lmasligidan uning chap tomonidagi limitning mavjud bo’lmasligi kelib chiqmaydi.

9-misol. lim ^л ' limitni toping.
•' • ' *x*

Yechish. Lopital qoidasini qo’llaymiz:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \to \infty} (1 + \cos x).$$

\-co da 1+cosx ifoda 0 bilan 2 orasida tebranadi, ya‘ni x ->+» da 1+cosx itodaning limit! mavjud emas. Shu sababli Lopital qoidasini qo’llab bo’lmaydi.

Izlanayotgan limitni boshqa yo’l bilan topamiz. A' + sin.x (sinxA
lim ------------------- = lim N --------------- — I- 1+ lim
x \ A) •'-**

24.3. co-oo ko’rinishdagi aniqmaslik

Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda]jm /(.?) = w, |jm = m bir xil ishorali cheksizlik bo’lganda lim (/(A) - $c>(x)) limitni topish tushuniladi. Bunday aniqmasliklar - yoki — ko’rinishdagi aniqmaslikka keltirilib keyin Lopital 0 00
qoidasidan foydalaniladi. Bunda *a* = <*x*> bo’lishi ham mumkin.

10-misol. lim ! -— \ In A p—L) к In A limitni toping.

A - 1J
fl 1 V

Yechish. lim -------------------------- (oo-oo)
к hi A A-ly

(A -1 - In A)' 1 x
= hm ------------ ~—“-lim i
((A-i)inx) |nx+^x_q._

A’
1
I 1
= lim i ~ lim ----------- --------- — - —.
|nx+x.1 + | lnx + 2 2
A'

24.4. 0 co ko’rinishdagi aniqmaslik

Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda lim /(A) = 0 , lim </>(A) = co bo’lganda lim/(x)

(A) limitni topish tushuniladi. Agar

A
A-l fO) . (A-I/

J I
/(A)

ko’rinishda yozilsa 0-oo ko’rinishdagi aniqmaslik yoki

aniqmaslikka keltiriladi. Bunda *a* = co bo’lishi yoki

ham mumkin.

0 (6-misolga qarang).

11-misol. lim vln л*(0-co) = lim
—I
.V

24.5. l^z ko’rinishdagi aniqmaslik CO ko´rınıshdagı

■ Iganda

Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda lim /(x) = i, lim <p(x) = «> bo

lim [/(.v)]*’,TI limitni topish tushuniladi.

Agar [/(-')Г(> = eИг>|’,’/1л) (a) ko’rinishda tasvirlansa Г ko’rinishdagi
ani maslikni ochish 0 » ko’rinishdagi aniqmaslikni ochishga keltiriladi. Bunda 3 =«, bo’lishi

ham mumkin.

A J

12- misol. Iim(l + w-v)r limitni hisoblang.

Yechish. lim (1 + fflx)x (I)= lim e^x = $e^{''''x}$ ~e" .1 1 lii(hmr) lim 1 ln(l+»r.v) Km * 'I P' lira - —v '> = $e^{ш}$.

24.6. 0° ko'rinishdagi aniqmaslik

Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda lim /(x) - 0 . lim <o(x) - 0 bo'lganda lim [/(.r)t(x' limitni topish tushuniladi. Bu holda ham yuqoridagi (a) tenglikdan foydalaniladi. Bunda *a* = on bo'lishi ham mumkin.

13-misol. lim x'(0°) = lim *e* ix =e' =e°=l.

24.7. oo° ko'rinishdagi aniqmaslik.

Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda lim *f(x)* = « , lim^(.v) = o bo'lganda lim [/(A)]*'1" limitni topish tushuniladi. Bunda *a* = <x> bo'lishi ham mumkin.

14-misol. lim (-In x)'(ад ")= lim el«(ııl-r)' = lim

lim x-ln(-lnx)(0 co) — lim — —l=lim 0n(~*пл)) — lim ~'nv (—
<->«> .r-*+0 1 ^CO J Л-..0 < ' V-«>]
0

=- lim —- = 0 .Demak lim (- In v)'=e° = l.
•v'++0 lnx

4-eslatma. Г, 0" va co0 ko'rinishdagi aniqmasliklar [/(x))/'<t> ifodani logarifmlab -- yoki — ko'rinishdagi aniqmasliklardan birortasiga keltiriladi.

Shunday qilib,0<o, co-co, Г, co", O'1 ko'rinishdagi aniqmasliklar -yoki - 0 co ko'rinishga keltirilib keyin Lopital qoidasidan foydalanilar ekan.

Isbotlangan lim—-i^-1, lim——- = lno, lim-——- = p ajoyib limitlarni r-n Д- v.>d
Y v
Lopital qoidasidan foydalanib isbotlashni o'quvchiga tavsiya qilamiz.

Mustaqil yechish uchun mashqar va test savollari

Limitlar topilsin.

lim - л " 1
x'- 2x2 + 2x -1 Javob: 2.

НтГ'-.?-8л+12
"** X - X" + X + 6 Javob: 0.

lim"'-6'
x-M) Javob: In

4. Javob: co

5. Javob: I.

6. Javob: I.

7. Й1 Javob: - .
2

Javob: 0.

9. Iim(l -x)lg—x. Javob: —.
л->1 2 я

10. lim x" lnx(/> > 0). Javob: 0.
,v-++0

11. Javob: 0.

12. hm(~- ardgxy . Javob: 1.
Я

13. lim (2 I — arctgx .V Javob: *e*
Л xl Д-

14. litn(cosx)^2 • Javob: -y=.
Л- >0 v<?

15. lim(to)^{sin2x} Д' Javob: 1.
,v—>—
2

16. Iim(l +Л-'^{1})' topilsin.
,v—>x '

A) 0 B) co D) 1 E) n F) 2.

17. lim (/7e/V) topilsin.

A) 0 B) w D) I E)n F) 2.
I 8. lim(/gx)'"" topilsin. AГ-M)
A) 0 B) co D) 1 E) 2 F) 3.

. n v'4 + *x* — >*f2x* + 6 ...
19. lim-------------------- topilsin.
>■ > .v i 2

A) 4= B)~ D) Л E)2V2 Г) -L .
2V2 2V2 V2

20. lim; — - -- topilsin.
IDA]

A) 2 B) 1 D)0 E) 1 F)-- .
2 2

O'z- o'zini tekshirish uchun savollar

1. Aniqmaslikni ochish deganda nima tushuniladi?

o 2ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasini ayting.
2' 0
3 5 ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasini ayting.
I *O-м* ko'rinishdagi aniqmaslikka Lopital qoidasini qanday qo'llash mumkin.
' <»-<» ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasidan qanday foydalaniladi?
(, 1ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasidan qanday foydalaniladi?
7 o" ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasidan qanday foydalaniladi?
8. oo" ko'rinishdagi aniqmaslik qanday ochiladi.
9 Birinchi ajoyib limitni Lopital qoidasi yordamida isbotlang.
10. Istalgan limitni Lopital qoidasi yordamida topish mumkinmi?

25- ma'ruza. Mavzu: Teylor va Makloren formulalari

Reja :

1. Teylor formulasi.
2. Makloren formulasi.

funksiyani Makloren formulasi buyicha yoyish.

4-/W = sin x funksiyani Makloren formulasi buyicha yoyish.

5. /(x)=cosx funksiyani Makloren formulasi buyicha yoyish.
6. /(x)= (l + x}'funksiyani Makloren formulasi buyicha yoyish.

Adabiyotlar: 1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,13,14,15.

Tayanch iboralar: ko'phad, Teylor ko'phadi. qoldiq had, Makloren ko'phadi, qoldiq hadning Lagranj shakli, Nyuton binomi.

25.1. Teylor formulasi. Matematik analizning muhim formulalaridan biri bilan tanishamiz. Bu formula matematik analizning o'zida ham shunga o'xshash matematikaga yaqin boshqa fanlarda ham ko'p sonii tadbiqlarga ega. *)' = a„x"* +«).v"'1 + ... + <7„.r + <7„ ko'rinishdagi funksiyani **ko'phad** deb atadik, bundagi «-natural son ko'p hadning darajasi. Ko'p had istalgan tartibli hosilalarga ega ekanligi ko'rinib turibdi. Endi teskari masalani qaraymiz, ya'ni bir qancha hosilalarga ega bo'lgan funksiyani ko'p had ko'rinishida tasvirlash mumkinmi? Bu savolga qo yidagi ley lor (1685-1731) teoremasi javob bcradi.

25.1 -tcorema. /(.v) funksiya .v ~*a* nuqtada va uning biror atrofida *(n* + lj- tartibgacha uzluksiz hosilalarga ega ((z? t l)—hosila ham kiradi) bo'lib. x shu atrofga tegishli va a dan farqli ixtiyoriy nuqta bo'lsin. U holda rz bilan x orasida shunday r nuqta topi lib

Л*) = /(a)+^(x _„) + /_ЬI(л—a)^2 +... + Z-(x-<-z)" + +--------------- ^(x-a)$^{1"+h}$ (25.1)

formula o'rinli bo'ladi. Bunda /?! orqali 1 dan *n* gacha natural sonlarning ko'paytmasi helgilangan, ya'ni n!=l-2-3-....z? (o'qilishi: en faktorial). Masalan, !!=1, 21=1-2=2, 31=1 -2-3=6, 41=1 -2-3-4=24 va hokaza. Umumiy qonuniyatni saqlab qolish maqsadida 01=1 deb olinadi.

Isboti. *<p(x,a) =f(a') +* ——*(x-a)* + ^—^-*(x-a')*^{2}+... + ——-*(x-a)"*
1! 2! /7!

belgilashni kiritamiz. Bu ko'phad Дх) funksiyaning (x-я) ning darajalari bo'yicha Teylor **ko'phadi** deyiladi. *f(x)-<p(x,a)* = /?„+)(x) deb bclgilaymiz. Agar

(/7 + 1)!

ekanligini ko’rsataolsak teorcma isbot bo’ladi, bunda *z a* bilan *x* orasidagi qiymat x ning qaralayotgan atrofga tegishli ixtiyoriy qiymatini olamiz. Aniqlik uchun *x>a* deb hisoblaymiz. [a,x] kesmada o’zgaruvchi miqdorni *t* orqali belgilab

Ж = /(x)-^(x,/)- 1(25.2)
(x-a)

yordamchi funksiyani qaraymiz. Bu funksiya [a,x] kesmada Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi: 1) (25.2) formuladan hamda teoremada *J\x)* ga qo’yilgan shartlarga binoan /*’(/) funksiya [a,x] kesmada uzluksiz va differensiallanuvchi. chunki /(z) funksiya /rH-tartibgacha uzluksiz hosilalarga ega;

2) (25.2) formulaga *t~a* qiymatini qo’ysak

/7(Л= ^,,i(x)= 0

va unga *t-x* qiymatni qo’ysak

ru+l

I ! 2 ! _ *n !* (x - *a)*

kelib chiqadi. Demak F(a)=F(x). Roll teoremasiga ko’ra (a,x) intervalda shunday *z* nuqta topilib funksiyaning bu nuqtadagi hosilasi nolga teng, ya‘ni F'(z) = 0. /■'(/) hosilani hisoblaymiz. (25.2) tenglikka ^(xj)o’rniga uning qiymatini qo’yib, keyin hosil bo’lgan tenglikni / bo’yicha differensiallasak

F(,)=_/-(/)+Zi!_£0(.v_/)+Z®2 (x-r) -ZD(x-/V +...+Z!^.)/7(A-/)"-1 -
1! I! 2! 2! *n!*

n! V ’ (x-af1

yoki o’xshash hadlar qisqartirilgandan so’ng

F*(r) = ——*{x-/)" +* + hosil bo’ladi. Bunga Z=z qiymatni qo yib
/7! (x - *a)* ’

F’(-) - 0 ekanligini hisobga olsak

Bundan Teorema isbot bo’ldi.

(25 **1)** formula **Teylor formulasi** deb ataladi, Я,,Дл)- ДА)- *(p(x,a)* esa r **.Heining ooldiq hadi** deb ataladi. /?,,,(л) qoldiq hadning turli shakllari Teylor formula =
^av ud bo’lib teoremada keltirilgan ^.(v) “ jp' a)"+’ shakli qoldiq hadning **I aaranj shakli** deb

ataladi.

& /? I') qoldiq hadni boshqaeharoq ko’rinishda yozish ham munikin. зе(д,л)
bo’kani uchun (0,1) intervaida shunday *в* son mavjud bo’lib *z* = *az ()(x - a)* tenglik o’rinli

bo’ladi. U holda $/?_{,,+1}(^x)$ = O<0<1 ko’rinishga ega

bo’ladi.

25.2. Makloren formulasi. (25.1) Teylor formulasining a-0 bo’lgandagi xususiy ko’rinishi

Makloren (1698-1746) **formulasi** deyiladi. Bunda $Д_{|+|}(x) = 4\frac{Л^{"\cdot)}(-)}{(/?+1)!}Д.г^{"+|}$ yoki

/?,,Дx) = 2-—A -2x"+1, 0 < *0* < I va *z* 0 bilan *x* orasidagi qiymat.

(25.1) va (25.3) formulalardan ko’rinib turibdiki qoldiq had Я,,Дx) qanchalik kichik bo’lsa Дx) funksiya shu funksiyaning Teylor ko’phadiga shunchalik yaqinlashar ekan.

Endi ba‘zi-’oir muhim elementar funksiyalarning Makloren formulalari bilan tanishamiz.

25.3. funksiyani Makloren formulasi bo’yicha yoyish

/(■v)- /'(x) = /’(+) = ••• = Д'+1)(г) = <?* bo’lgani uchun /(o)-/'(o) = r(o) = ... = r(o) = i bo lib (25.3) Makloren formulasi quyidagi ko’rinishga ega bo’ladi.

$$e'= 1+\frac{}{1!}+\frac{}{2!}+\frac{}{3!}+\frac{}{»!}\frac{}{(л+l)!}.r^{"’1},\quad 0<(-)<1. \qquad (25.4)$$

Bu formula istalgan xe(-oo,+oo) uchun o’rinli. Endi shu yoyilmadan foydalanib e sonni istalgan aniqlikda hisoblash murhkinligini ko’rsatamiz. Agar / funksiyani uning Teylor ko'phadi bilan almashtirsak

$$C \sim l\, 4\frac{v\,|\,^{v}x,,}{1!}\frac{1}{2!}r\ldots t^*\frac{x_{"}}{n!} \qquad (25.5)$$

taqribiy tenglikka ega bo’lamiz, bunda absolyut xato $1/<_{+}.(л)| = Д\frac{r-}{(/7+1)!}$ * 1

Agar e funksiya [-1; 1] kesmada qaralsa

11 (/7+1)! (/7+1)! (25.6)

chunki 2<e<3. (25.5) gax=l qiymatini qo'ysak *e* ning qiymatini taqribiy hisoblash uchun *e"* = 1 + I + - + -— + ... + —
2! 3! и!

formulaga ega bo'iamiz, bunda absolyut xato --------------- dan kichik. Agar *e* ning
(* + !)!

qiymatini 0,001 aniqlikda hisoblash talab etilsa, /? (7+lTi<0,001 ten Ssizlikdan

aniqlanadi, ya'ni (/7+])!>-—— = 3000 yoki 7!=5040>3000 bo'lgani uchun deb
0,001

olish mumkin, ya'ni *e* ~2 + -— + -- + — + — + -»2,718.
2! 3! 4! 5! 6!

Shunday qilib, Makloren formulasidan foydalanib *e* sotini istalgan aniqlikda hisolash mumkin ekan. (25.5) va (25.6) formulalarga asoslangan *e* sonni hisoblash algoritmi EHM da osonlikcha amalga oshiriladi.

25.4. /(x)=sinx funksiyani Makloren formulasi bo'yicha yoyish

/(x) = sinx, /'(x) = cosx,/'(x) = -sinx,/"(x) = -cos л-, ,/(""(x) = sinf v + /7— I.
к

0, *n juft son bo'Isa,*
• u-i
(-1) 2 ,/7 *fog son bo'Isa.*
/("+l)(z) = sinfz + (n + l)y

Topilgan qiymatlarni (25.3) Makloren formulasiga qo'yib sinx uchun ushbu yoyilmani hosil qilamiz.

л"' X5 , A'2"'* X2"+l
sinx-x -------- H------ ...+ (-l) ---------------- 4---------
3! 5! (2/7-1)! (2/7+1)!

/(0) = sinO = 0,/'(0) = cosO = l,/'(0) - -sinO = 0,/"(0) - - cosO = -1, ... ,/l"'(0) - sin/7 y =

|. bunda c 0 bilan *x* orasidagi qiymat.
—sinfz +(2/7 + 1) |j
(25.7)

Bu formula istalgan xe(-од, + ») uchun to'g'ridir. Bu formuladan foydalanib sinx funksiyaning istalgan qiymatini istalgan aniqlikda hisoblash mumkin.

1- misol. sin 10' ning taqribiy qiymati 0,00001 gacha aniqlikda hisoblansin. **Yechish.** Burchakning radian o'lchoviga o'tilsa

л- = Юу = —
18 bo'ladi. Agar sinx funksiyani uning Teylor ko'phadiga almashtirsak

--.... + (-1)"4 5! (2л-1)!
3 A-2'"1
V
Sill A* - A* ------
3!

hosil bo'ladi. Bunga $x = \frac{\pi}{18}$ qiymatini qo'yamiz.

sin 10 ^1.l0 -Sill—« 7Г 71 I (7Г V 1 f 77 V ----------- — + —— + ... + (-l) ^t .... -------------- 1

18 18 3!\18) 5!(18y (2/7-1)!

Bu holda xatolik:

1 (* < (2« + 1)K18

Agar л=1 bo’lsa, u holda |Ля| < = 0,00089 > 0,00001.

Agar n=2 bo’lsa, u holda ^[<1^ = 0,0000013 < 0,00001.

Demak taqribiy formulaning dastlabki ikkita hadi olinsa hisoblashning talab qilingan aniqligiga erishiladi.

sin 10° « — - -f —I = 0,17453 - 0,00089 - 0,17364.
18 31118J

25.5. /(x)=cosx funksiyani Makloren formulasi bo’yicha yoyish y(x)=cosx funksiyaning x=0 dagi ketma-ket hosilalarini topish va Makloren formulasiga qo’yish bilan qo’yidagi yoyilmani hosil qilamiz.

cosx = 1 -----a........ ......+ (-1)" 1 ------- 1 ---------- cost 7 + (n + 1)я"). (25.8)
2! 4! (2л)! (2л+ 2)!

Endi qoldiq hadni baholash imkonini beradigan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

ko’rsatamiz. $\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$ |x X x x x 1 / |1 2 3 л л+ 1| = 0 tenglik *x* ning har qanday aniq qiymatida to’g’ri ekaniigini

Iga egamiz. Agar *x* aniq son bo’lsa u holda

shunday W natural son topilib |x| < W tengstzlik barcha *N* dan katta *n* lar uchun bajariladi.

i j
— = belgilashni kiritamiz; u vaqtda miqdor o’zgarmas ya‘ni n ga bog’liq emaJ, 0<^<1

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{1}\right|\cdot\left|\frac{x}{2}\right|\cdots\left|\frac{x}{N-1}\right|\left|\frac{x}{N}\right|\left|\frac{x}{n+1}\right|\cdots\left|\frac{x}{n}\right|\left|\frac{x}{n+1}\right| < \frac{|x|}{1}\cdot\frac{|x|}{2}\cdots\frac{|x|}{N-1}\cdot q\cdot q\cdots q\cdot q = \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}q$$ I- V♦2

chunki i—I = $q, \left|\frac{x}{N+1}\right| < q, \ldots \left|\frac{x}{n+1}\right| < q$ bo’lgani uchun л-»o> da g” л+‘nolga intiladi. Shuning uchun

Ammo $\frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}$

Demak, n->oo da e',sinx,cosx funksiyalarning yoyilmalaridagi qoldiq adlarning barchasi 0 ga intiladi, chunki e"[1] chekli son jsinj c+ (2л +1) j < I, + (« + !»[< i.

25.6. /(x) = (1 +x)^и **funksiyani Makloren formulasi bo'yicha yoyish**

/(x) = (1+x)" funksiyaning x=0 nuqtadagi hosilalarini hisoblaymiz, bunda *a* -o'zgarmas son.

/(x)=(1 + x)",/'(x)=a(l +x)“‘',/*(x)=a(<x -1)(1+x)“–2,..../"'(x)=a(a - l)(a-2)....(z л 4-1)(] +

/ᵛ'*ʰ(x) = a(a-l)(a-2),.......... *(a-n\\ + xУ'''* va

/'(0) = a,/'(0) = *a(a* - ^/'"'(O) = *a(a* - l)(cr - 2)....(a - л +1),

x"+l

K,,+i W = ; - — ' «(« - D(a - 2) ..*(a - n)(l* + z)"'"'1.

(n + 1)!

Hosilalarning topilgan qiymatlarini (25.3) Makloren formulasiga qo'yamiz: /, v< . a

a(a-l) , *a(a-l\a-2)* ,

(1 4- X J = 1 + — X + — ---------- - - X 4- — .... ------------------------ -- X 4- ----- 4-

1! 2 I 3!

, a(6T-l)(a-2)...(a-« + l) ,, n , , (25.8)

n

Bu formula istalgan x e (-1,1) uchun o'rinli.

Xususiy holda *a-n* natural son bo'lsa, = 0, demak $Я_{л+|}$(x) = 0 bo'lib (25.8) dan **Nyuton binom formulasi**

/ v, n *n(n-\)* , л(л-1)(л-2) ,

(1 + *x)* = 1+—x + — - -x*+ —-----— --- -x + ...4-X

1! 2! 3!

+ -----------------:------------ -v +/?,,+t(x)

kelib chiqadi.

2- misol. Vs3 ning taqribiy qiymatini 0,000001 gacha aniqlikda hisoblang. **Yechish.** Berilgan ifodani

ko'rinishda yozib

/, \.r , *a a(a* -1) , *a(a* - l)....(a -*n* + 1) ,,

(14- x J »I + -x+ — ---- - x* + ...+ —- -— ----------x

1! 2! л!

taqribiy hisoblash formulasidan foydalaniamiz.

x ~ —,*a* - - desak

81 4

.. +

2!

yoki ba‘zi hisoblashlardan keyin

I0-IY1 -2Y--f1 -A v+.

... h—Ml (i+z)?"-1.

Xatolik: 3Я,,и--> (л? + 1)! ^81J v

Hisoblashlarning xatoliklari 3|/?,,| ketma -ketlikni baholaymiz: agar n-l bo'lsa, u holda

3]/?2|<^< 0,018518 >0,000001;

agar z?=2 bo'lsa, u holda 3|/?,| < < °-000- > 0,000001;

agar /7=3 bo'lsa, u holda 3|/?J < 162J0g^6 < 0,000003 > 0,000001;

agar /7=4 bo'lsa, u holda 3|/?5| < 7^7,-"--^ < 0.00000006 < 0,000001.

Demak, hisoblashning talab etilgan aniqligiga erishmoq uchun Я5 dan oldin keladigan to'rtta had yig'indisini olish kifoya:

Vfe « 3(1 + 0.006 173- 0.000057 + 0.000001) = 3,018349 .

Shunday qilib, Makloren formulasidan foydalanib funksiyaning taqribiy qiymatini talab etilgan *s* aniqlikda hisoblash uchun bu funksiyani Teylor (Makloren) ko'phadi bilan almashtirib undagi qo'shiluvchilar soni *n* ni tengsizlikdan aniqlash lozim ekan, bunda *R,, +}*-qoldiq had.

Endi Makloren formulasining yana bir tatbiqi, ya'ni undan foydalanib funksiyaning limitini topish usuli bilan misollarda tanishamiz .

3- misol. lim—-—- topilsin.
л—>U

Yechish. /7=2 bo'lganda (25.7) ga binoan

x' x' . I
S111X - X--------- r----- Sill 1
3! 5 !

' 5
x x — 4-- COSZ
3! 5

bo'lganligi sababli

X' A"' X - + COS 2 - x /
31 5* =4-±+£
Л- x' 3! 51

kelib chiqadi.

4-misol. lim -—-—topilsin л-.o x'sin.v

Yechish. (25.4) ga binoan

, X" 1 j X
2 2!(:

(25.8) formulaga asosan COSA-I - —-

hamda (25.7) formulaga ko'ra *sinz-x* - —sin z + - x +----------- COS 2
3! (6

O’suvchi funksiyaning ta‘rifiga binoan x, - x >0 bo’lganda /(x_2)-/(x)>л bo’ladi. Agar x, -x, - Av, /(x,)-/(x,)-Ay deb belgilasak, Av > 0 va Ay>0 ekanini ya‘ni orttirmalar bir xil ishorali ekanini ko’ramiz.

Shunday qilib o’suvchi funksiya uchun ~>0 bo’lar ekan. Shunga o’xshash

kamayuvehi funksiya uchun < 0 bo’lishiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

26.1- teorema(funksiya o’suvchi bo’lishining zaruriy sharti). Agar ($_o$-/,) intervalda differensiallanuvchi *y = f(x)* funksiya shu intervalda o’suvchi bo’lsa, u holda bu funksiyaning hosilasi intervalning hech bir nuqtasida manfiy bo’lmasligi zarur, ya‘ni (л; i>) intervaldagi barcha *x* lar uchun /’(x)>0 bo’ladi.

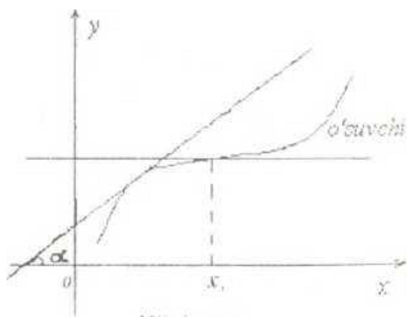
Isboti. Teoremaning shartiga ko’ra y = /(x) funksiya (a; Z>) intervalda o’suvchi, shu sababli istalgan x<=(<?; 6) uchun — >0. Musbat funksiyaning limiti manfiy bo’la Av olmasligi sababli *tim* >0. Ammo teoremaning shartiga ko’ra /(x) funksiya 0 />) \v->0 ĄY '

intervalda differensiallanuvchi bo’lganligi sababli f’(x) = chekli limit mavjud Av J

va (<?;/?) dagi barcha x lar uchun /'(x)>0 bo’ladi. Teorema isbot bo'ldi.

26.2- teorema(funksiya kamayuvehi bo’lishining zaruriy sharti). Agar (a;6) intervalda differensiallanuvchi y = /(x) funksiya shu intervalda kamayuvehi bo’lsa, u holda bu funksiyaning hosilasi intervalning hech bir nuqtasida musbat bo’lmasligi zarur, ya‘ni (a; *b)* intervaldagi barcha *x*
lar uchun /’(x)<0 bo’ladi.

Teoremani isboti kamayuvehi funksiya uchun --~<0 ekanini hisobga Av olinsa 26. l-teoremang isbotidagi mulohazalarni takrorlagani uchun uni isbotlashni o’quvchiga hovola etamiz. Bu teoremalar quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. O’suvchi funksiyaning grafigi Ox o’q bo’ylab o’ngga harakatlanganda yuqoriga ko'tarila boradi.



110-chizma

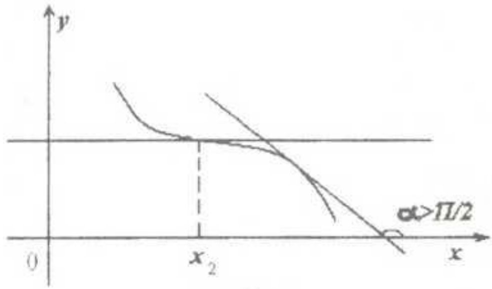
Bu holda grafikka urinma Ox o’qning musbat yo’nalishi bilan o’tkir burchakni tashkil etadi. yoki ba'zi-bir uuqtalarda u Ox o’qqa parallel bo’ladi. Masalan x, nuqtada / (.v.) - 0(1 10-chizma).

O’tkir burchakning tangensi musbat (urinma Ox ga parallel nuqtalarda nolga teng) va hosilaning geometrik ma‘nosiga ko’ra *iga - f(x)* bo’lgani sababli o’suvchi funksiya uchun /’(x) > 0 kelib chiqadi.

Kamayuvehi funksiyaning garfigiga urinma Ox o’qning musbat yo’nalishi bilan o’tmas burchak tashkil etadi, yoki Ox ga parallel bo’ladi. O’tmas burchakning

tangensi manfiyligini hisobga olib kamayuvchi funksiya uchun /'(x)<0 tengsizlikka $e_g$abo'laniiz(111-chizma).

26.3- teorema(funksiya o'suvchi bo'lishining yetarlilik sharti). Agar ЬI kesmada uzluksiz y = /(-*) funksiya (a; 6) intervaida musbat hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiya [a; Z>] kesmada o'suvchi bo'ladi.



Isboti. Barcha *a*<*x* < *b* uchun /'(x-)>0 bo'lsin. (a;d) intervalga tegishli ikkita ixtiyoriy .r, <A\ qiymatlarni qaraymiz.

[,$_{V|}$, x,] kesma uchun Lagranjning chekli ayirmalar formulasini yozamiz: /(-^{V}?)- /G'I) = /'(c)G_2 - v,), .r, < *c* < X, (26.1)

Teoremaning shartiga ko'ra /'(<?)> 0. Bundan tashqari x,-x,>0. uchun (26.1) Shuning tenglikdan /fa)-/(x,)> 0 yoki /(x,)>/(x_1), ya'ni /(x) [a; d] kesmada o'suvchiligi kelib funksiya chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

26.4- teorema(funksiya kamayuvchi bo'lishining **zaruriy** sharti). Agar [a; />] kesmada uzluksiz y = /(x) funksiya *(a\b)* intervaida manfly hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiya [a; Z>] kesmada kamayuvchi bo'ladi.

[<?: A] kesmada faqat o'suvchi (faqat kamayuvchi) funksiya shu kesmada monoton o'suvchi (monoton kamayuvchi) funksiya deb atalar edi.

Funksiya faqat o'suvchi yoki faqat kamayuvchi bo'ladigan intervallar uning monotonlik intervallari deyilar edi.

1- inisol. y = x: funksiyaning monotonlik intervallarini aniqlang.

Yechish, y hosiiani topamiz: y'=2x.

x<0 da y<0 va funksiya (-co;0) intervaida kamayadi;

X > 0 da y'> 0 va funksiya (0;+a>) intervaida o'sadi;

2- misol. y = 4x + sinx funksiyaning monotonlik intervallarini aniqlang.

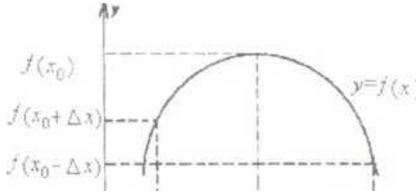
Yechish. y' hosiiani topamiz: y'-4 + cosx. Barcha xe(-ao;+<») uchun v'> 0bo'lganligi sababli berilgan funksiya (-co;+oo) intervaida o'sadi.

26.2. Funksiyaning maksimum va minimumi

■v_u nuqtada va uning atrfida aniqlangan > /(v) funksiyani qaraymiz.

1-ta'rif. Agar *y*- /(x) funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati shu funksiyaning bu nuqtaning yetarlicha kichik atrofidagi qolgan qiymatlaridan katta bo'lsa, y-/(x) funksiya x_0 nuqtada **maksimum** (ma.ximum)ga ega deyiladi.

Boshqacha aytganda, agar har qanday yetarlicha kichik musbat yoki manfiy Ax larda /($x_ц$+Ax)</(x_u) bo’lsa, /(x) funksiya x„ nuqtada maksimumga ega deyiladi(Ax > Odal 12-chizma). Bu holda x_0 funksiyaning maksimum nuqtasi deyiladi.

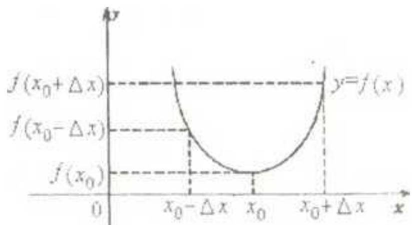


o x_0-Дх Xo AQ+ISX **X**

112-chizma

2-ta‘rif. Agar *y* = /(x) funksiyaning x„ nuqtadagi qiymati shu funksiyaning bu nuqtaning yetarlicha kichik atrofidagi qolgan qiymatlaridan kichik bo’lsa, y = /(x) funksiya x_0 nuqtada **minimumga** ega deyiladi.

Boshqacha aytganda, agar har qanday yetarlicha kichik musbat yoki manfiy Av larda /(.$v_{()}$ + Ar) > /(xj bo’lsa. /(x) funksiya x„ nuqtada minimumga ega deyiladi(Av> Oda 113-chizma). Bu holda x# funksiyaning minimum nuqtasi deb ataladi.



113-chizma

Masalan, y = x^2 funksiya x=0 nuqtada minimumga ega, chunki x-0 bo’lganda y=0 va x ning boshqa qiymatlarida y>0.

1- eslatma. [a;/?] kesmada aniqlangan funksiya o’zining maksimum va minimum qiymatlariga ning shu kesma ichidagi qiymatlaridagina erishadi. Boshqacha aytganda /(«), *f(b)* qiymatlar funksiyaning maksimum va minimum qiymatlari bo’laolmaydi.

2- eslatma. Funksiyaning [a; б] kesmadagi maksimum va minimumini uning shu kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari deb qarash xato bo’ladi. Funksiyaning maksimum qiymati uning funksiya maksimumga ega nuqtaga yetarli darajada yaqin turgan hamma nuqtalaridagi qiymatlariga nisbatangina eng katta bo’ladi. Funksiyaning minimumi haqida ham shunga o’xshash gaplarni aytish mumkin

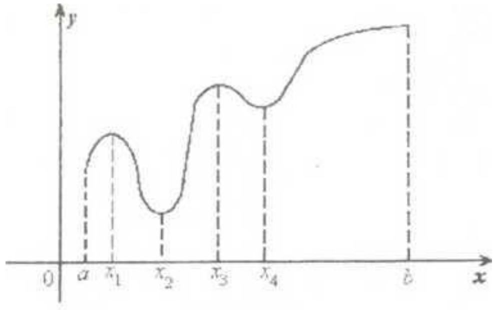
Funksiyaning maksimumi uning minimumidan har doim katta bo’ladi deb o’ylash noto’g’ri. 114-chizmada ju; Z?] kesmada aniqlangan funksiya tasvirlangan.

Bu funksiya: .v -.$v_($ va л - - $y_($ nuqtaiarda maksimumga ega: v v. va v-v nuqtalarda minimumga ega; lekin funksiyaning x = x_t nuqtadagi minimumi uning x = .v nuqtadagi maksimumidan katta. Funksiyaning *x-b* nuqtadagi qiymati lining [a; *b]* kesmadagi eng katta qiymati bo’ladi.

Funksiyaning maksimum lari va minimumlari funksiyaning **ekstremumiari** yoki **ekstremal qiymatlari** deyiladi.

Agar A'o nuqtada funksiya ekstrimumga ega bo’lsa u holda bu nuqta funksiyaning ekstrimum nuqtasi deyiladi.

Izoh. Biror oraliqda faqat o’suvchi(faqat kamayuvchi) funksiya shu oraliqda ekstremumga ega bo’lmaydi.



114-chizma

/’(x_o)>0 va /'(xJ<0 munosabatlardan /'(x_o) = 0 kelib chiqadi. geometrik mazmuni shuni bi ldiradiki, differensiallanuvchi

26.3. Ekstremum mavjudligining zaruriy sharti

26.5-teorema. Agar differensiallanuvchi >-/(x) funksiya x_o nuqtada ekstremumga ega bo’lsa, u holda uning shu nuqtadagi hosilasi nolga teng bo’lishi zarur, ya‘ni /(л-) = 0 bo’ladi.

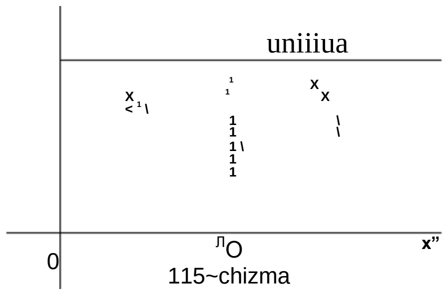
Isboti. Aniqlik uchun funksiya ,v_0 nuqtada maksimumga ega deb faraz qilamiz(l 15-chizma).

1) U holda x<x,. lar uchun funksiya o’suvchi va — >0,

Av

demak,/’(x,,)= lim ^>0;

2) x>xjar uchun funksiya kamayuvchi va -Л~<0, demak.



115~chizma

/'(-v_0) = lim — < 0 .

U-.+O Дд. Teoremaning .... „ ...., ...

funksiya uchun ekstremum nuqtalarida urinma Ox o’qqa parallel bo’ladi. Biz shu paytgacha funksiya ekstremumga ega bo’lgan nuqtalarda differensiallanuvchi deb faraz qildik.

Funksiya hosilaga ega bo’lmagan yoki hosilasi cheksiz bo’lgan nuqtalarda ham funksiya ekstremumga ega bo’lishi mumkin.

3- misol. v-|.v| funksiya butun son o'qida uzluksiz bo’libx-0 nuqtada hosilaga cga emasligi isbotlangan cdi. Bu nuqtada funksiya minimumga ega (100-chizma).

4- misol. j = i v.v^2 funksiyaning hosilasi x~0 nuqtada cheksizlikka

3 V x

aylanadi. funksiya x~0 nuqtada maksimumga ega (108-chizma).

Shunday qilib funksiya ekstremumga ega bo’lgan nuqtalarda funksiyaning osilasi yo nolga teng, yoki cheksizlikka teng yoki mavjud bo’lmas ekan. Bunday nuqtalar funksiyaning **kritik(statsionar)** nuqtalari deyiladi. Demak funksiya ekstremal qiymatlarini faqatgina o'zining kritik nuqtalarida qabul qilishi mumkin.

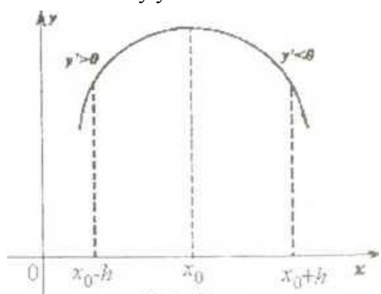
Teskari tasdiq o'rinli emas, ya'ni nuqtaning kritik nuqta ekanligidan shu nuqtada funksiyaning ekstremumga ega ekanligi kelib chiqmaydi. Masalan, jy = r' funksiyaning hosilasi $y'=3x^2$ x^O nuqtada nolga aylanadi. Ammo bu nuqtada funksiya ekstremumga ega emas, chunki u o'suvchi (y> 0).

26.4. Ekstremum mavjudligining yetarlilik sharti

26.6- teorema(ekstremum mavjudligining birinchi yetarlilik sharti). Ду funksiya kritik nuqta x,, ni o'z ichiga olgan birorta intervalda uzluksiz va shu intervalning barcha (balki x,, nuqtaning o'zidan boshqa) nuqtalarida differensiallanuvchi bo'lsin. Agar shu kritik nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosilaning ishorasi piyusdan minusga o'zgarsa, funksiya $x = x_0$ kritik nuqtada maksimumga ega bo'ladi. Agar $x = x_{()}$ kritik nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosilaning ishorasi minusdan plyusga o'zgarsa, funksiya bu nuqtada minimumga ega bo'ladi.

Isboti. x_0-kritik nuqta bo'lib uning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda /'(x) hosila ishorasini piyusdan minusga o'zgartirsin, ya'ni x,, nuqtaning chapida hosila musbat, uning o'ngida hosila manfiy bo'lsin. Demak shunday yetarlicha kichik musbat $h > 0$ son mavjud bo'lib (x_0-A, $x_{(t)}$) intervalda funksiyaning hosilasi /'(x)>0 va (x_0,x,,+/?) intervalda hosila /'(.v)<0 bo'ladi. Funksiyaning o'sishi va kamayishi haqidagi teoremaga binoan [$x_($,-/?, x,,] kesmada funksiya o'sadi , [x,,, x,, +/?] kesmada esa u kamayadi.

Demak, [$x_{(1}$ - /?, $x_($, + /?] kesmaga tegishli barchax lar uchun ,/'(x) </(x,,) bo'ladi.



116-chizma

Bu /(x) funksiya $x = x_y$ nuqtada maksimumga ega ekanligini ko'rsatadi (116-chizma).

Teoremaning ikkinchi qismi ham shunga o'xshash isbotlanadi(117-chizma). **Izoh.** x = $x_($, kritik nuqtaning bir tomonidan ikkinchi tomoniga o'tishda /'(*) hosila ishorasini o'zgartirmas? x-v,, kritik nuqtada funksiya ekstremumga eg? bo'lmaydi.

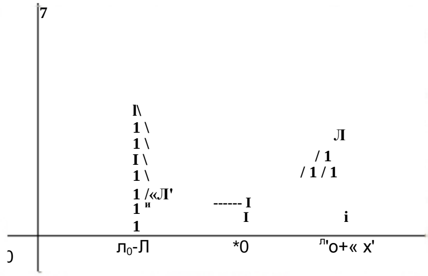
5- misol. $y = 2x^3-9x^2 + 12x+1$ funksiyaning monotonlik intervallarini va ekstremumini toping.

Yechish. 1) Berilgan funksiya (да + °o) intervaida aniqlangan va differensiallanuvchi.

2) Funksiyaning topamiz: y =6/ -I8x + 12.

3) Kritik nuqtalarini topamiz: $6r^2$ - 18x + 12 = 0; *x* -3.V + 2- 3 _3+ 1 . hosilasini *X,1*~ 2~ 2 x =] =2-kritik nuqtalar.

y=6(x-l)(x-2) hosilaning ishorasini intervallar usulidan 0 ; foydalanib tekshiramiz. $\sqrt{\frac{9}{4}-2}$

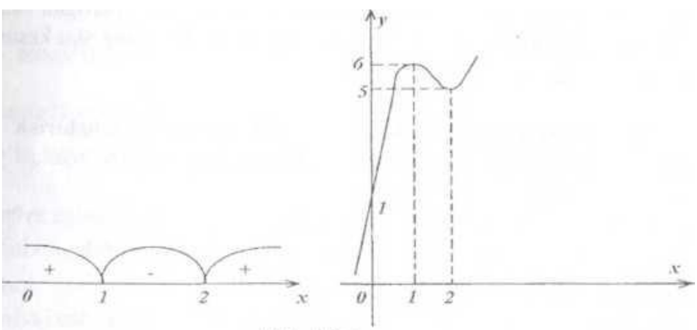


117-chizma

Demak, (~°o;l) va (2;+°o) intervallarda y> 0 bo’lgani uchun bu intervallarda funksiya o’sadi, (1; 2) intervaida y<0 bo’lgani uchun bu intervaida funksiya kamayadi. x=l kritik nuqtaning chap tomonidan o’ng tomoniga o’tishda hosila ishorasini plyusdan minusga o’zgartirganligi uchun л-l kritik nuqtada funksiya maksimumga ega. x=2 kritik nuqtaning chap tomonidan o’ng tomoniga o’tishda hosila ishorasini minusdan plyusga o’zgartirganligi uchun bu kritik nuqtada funksiya minimumga ega(l 18-chizma). = y(l) = 6, y_{inSn} = y(2) = 5 .

26.5. Funksiyaning kesntadagi eng katta va eng kichik qiymatlari

[<?: л] kesmada tizluksiz v = /(.v) funksiyani qaraymiz. Bu funksiya [n; Z>] kesmada



118-chizma.

o’zining eng katta va eng kichik qiymatlarini qabul qilishi aytilgan edi (18.5-teorema) Agar funksiya o’zining eng katta (eng kichik) qiymatlarini [<?;/>] kesmaning ichki nuqtasida qabul qilsa u funksiyaning (<?:/>) intervaldagi maksimum(minimum) qiymatlaridan biri bo’ladi. Bundan tashqari funksiya o’zining eng katta va eng kichik qiymatlariga [a; d] kesmaning oxirlarida ham erishishi mumkin.

Shunday qilib, funksiyaning [<?;£>] kesntadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun quyidagi qoidaga ega bo’lamiz.

1. Funksiyaning (a:6) intervaldagi barcha kritik nuqtalarini topib funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz.

2. Funksiyaning kesmaning oxirlari x = a, x = 6 nuqtalardagi qiymatlari *J\a\ J\b)* larni hisoblaymiz.

Topilgan qiymatlardan eng kattasi funksiyaning [«; *b]* kesmadagi eng katta qiymati, ulardan eng kichigi funksiyaning [a; *b]* kesmadagi eng kichik qiymati bo’ladi.

6- misoI. /(.v) - $2x^5$ -$2lx^2$ + 72x + 6 funksiyaning [2; 5] kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish.1. Funksiyaning [2; 5] kesmadagi kritik nuqtalarini topamiz. Buning uchun /'(x) = $6x^2$ -42x + 72 hosilani hisoblab /'(x) = 0 tenglamani yechamiz:

$6x^2$ -42x+72 = 0; x^2 - 7x + 12 - 0; x, = 3, x, = 4 -kritik nuqtalar. Kritik nuqta- larning har ikkalasi berilgan kesmaga tegishii. Funksiyaning x, =3 va x, =4 nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

/(3) = 2 ■ 3’ -21 • 3^2 + 72 ■ 3 + 6 = 87, /(4) = 2 • 4^5 -21 • 4^2 + 72■ 4 + 6 = 80.

2. Funksiyaning [2; 5] kesmaning oxirlari x = 2 va x = 5 nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

/(2) = $2\text{-}2^5$ $21\text{-}2^2$ + 72-2 + 6 = 82, /(5) = 2• 5’-21 • 5^2 + 72-5 +6 = 91.

Topilgan qiymatlar 82, 87, 80, 91 dan eng kichigi 80 berilgan funksiyaning [2; 5] kesmadagi eng kichik qiymati, ulardan eng kattasi 91 uning shu kesmadagi eng katta qiymati bo’ladi.

26.6. Ekstremumlarni ikkinchi hosila yordainida tekshirish

Ba‘zi hollarda funksiyaning ekstremumlarini uning ikkinchi hosilasi yordamida tekshirish qulay bo’ladi.

Faraz qilayiik y-/(x) funksiyaning hosilasi x = x„ nuqtada nolga aylansin, ya’ni /’($x_{(!}$) = 0 va funksiya shu nuqtada hamda uning biror atrofida ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo’lib, /”(x_0) * 0 bo’lsin.

26.7- teorerna(ekstremum mavjudligining ikkinchi yetarlilik sharti).

Agar _/"(x„)<0 bo’lsa /(x) funksiya x = x„ kritik nuqtada maksimumga ega bo’ladi, /”(x_o)>0 bo’lganda u x = $x_{()}$ kritik nuqtada minimumga ega bo’ladi.

Isboti. Aniqlik uchun /"(x„)<0 bo’lsin. /(x) funksiya x = $x_{()}$ kritik nuqtada maksimumga ega ckanligini ko'rsatamiz. Ikkinchi hosilaning ta‘rifiga binoan:

Shartga ko’ra ,/"(.v,,) -0 bo’lgani uchun ^^Ax<0 bo’lsin, u holda /'(x,, + Дx) > 0; agarda Дx>0 bo’lsa, u holda + Дx)<0. Bu x = x_0 kritik nuqtaning chap tomonidan o’ng tomoniga o'tishda osila ishorasini plyusdan minusga o’zgartirishini ko’rsatadi. Demak, ekstremum mavjudligining birinchi yetarlilik shartiga ko’ra ,y = /(x) funksiya x = x,, nuqtada maksimumga ega.

$$f''(x_0) = \lim \frac{y'(x_{,,} + Ax)}{Ax}$$

Ammo ,/"'(x_1)<0. Shuning uchun

$$/\blacksquare''(x_{,,}) = \lim_{V\text{-MJ}} \frac{+ AY)}{Ax} < 0.$$

limiti manfiy ifodaning o’zi ham kichik -Ar^1 lar uchun manfiy bo’lganligi sababli

Teoremaning ikkinchi qismi ham shunga o’xshash isbotlanadi.

7- misol. y=.x+2cosx funksiyaning [0;2/r] kesmadagi ekstremumini toping.

Yechish. 1. Birinchi hosiiani topamiz.: y=l-2sinx.

2. (0;2zr) intervalga tegishli kritik nuqtalarni topamiz:

l- $\frac{1}{2}$ 2sinx = 0; sinx = $\frac{it}{6}$ $\frac{5л-}{6}$ -> -^{v}i=-7>

3. Ikkinchi hosiiani topamiz: y”= -2cosx.

4. Ikkinchi hosilaning x, = — ва --- kritik nuqtalardagi ishoralarini
6 6

aniqlaymiz.

/'{-) =-2cos- =-2•—= -л/з <0, K-2cos—= 2-—= ^3 >0.
<6j 6 2 <6) 6 2

26.7- teoremaga binoan berilgan funksiya x,--- nuqtada maksimumga va
6

x, = — nuqtada minimumga ega bo’ladi.
6

= л $\frac{(at\backslash}{Ш}$ = $\frac{tt}{6}$ + 2cos $\frac{n}{6}$ - = $\frac{it}{6}$ + 2----=--- + V3 ~ 2,23 ,
7з 3,14 с-
2 6

$y_{min} = y$(5лЛ 5я 5л- 5л- Vi
— = — + 2cos—- =-------- 2 ---~ 1.78.
6) 6 6 6 2

8- misol. /(x) = x^q funksiyaning ekstremumini toping.

Yechish. Bu funksiya butun sonlar o’qida aniqlangan va differensiallanuvchi.

1. Hosiiani topamiz: /’(x) = 4x;.

2. Hosiiani nolga tenglashtirib uning ildizlarini topamiz: /'(x) - 0;
4x’ = 0; x=0-kritik nuqta.

3. Ikkinchi hosiiani topamiz: - 12$x^?$.

Kritik nuqtada ikkinchi hosila nolga teng, ya‘ni /"(0) = I2 0^2 =0. Demak, qaralavotgan ho! uchun ikkinchi yetarlilik sharti ishlamavdi. Birinchi vetarlilik shartiga murojaat etib topamiz: v<() da /’(x)<0 va x>() da /■’(.?)>0. Shunday qilib, A = 0 kritik nuqtaning chap tomonidan o’ng tomoniga o’tishda hosila ishorasini nunusdan plyusga o’zgartirganligi sababli x = 0 nuqtada funksiya minimumga ega.

Demak, kritik nuqtada ikkinchi hosila mavjud bo’lib u noldan farqli bo’lgandagina ikkinchi yetarlilik shartidan foydalanish mumkin ekan. Agar kritik

nuqtada ikkinchi hosila nolga teng bo'lsa yoki mavjud bo'lmasa, u holda ikkinchi yetarlilik shartidan foydalanib bo'lmaydi.

Shunday qilib differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning ekstremumini quyidagi sxema asosida izlash maqsadga muvofiqdir.

1. Fuksiyaning hosilasi /'(.r) topiladi.
2. Kritik nuqtalar topiladi; buning uchun: a) /'(л) = 0 tenglamaning haqiqjy ildizlari topiladi.

b) *x* ning /'(л) hosila mavjud bo'lmagan yoki cheksizlikka aylanadisjan qiymatlari topiladi.

3. Yetarlilik shartlarining birortasidan foydalanib topilgan kritik nuqtalarning bar birida funksiyaning maksimum yoki minimumga ega ekanligi yoki ekstremumning mavjud emasligi aniqlanadi.
4. /(x) funksiyaning ekstrimumi mavjud kritik nuqtalaridagi qiymatlarini hisoblab uning ekstremumini topiladi.

26.7. Ekstremumlar nazariyasining masalalar yechishga tadbiqi

Ekstremumlar nazariyasi yordamida geometriya, mexanika va hokazolarga doir ko'pgina masalalar yechiladi. Shunday masalalarning ba'z.ilarini yechish usuli bilan tanishamiz.

1- masala. Uzunligi 120 metrlik panjara bilan bir tomondan uy bilan chegaralangan eng katta yuzga ega to'g'ri to'rtburchak shaklidagi maydon o'rab olinishi kerak. To'g'ri to'rtburchakli maydonning o'lchovlari (bo'yi va eni) aniqlansin.

Yechish. Maydonning uzunligini *x,* eniniy*,* yuzini S orqali belgilaymiz. U holda to'g'ri to'rtburchakning yuzini topish formulasiga ko'ra maydonning yuzi 5-xy bo'ladi.

S yuz hozircha ikkita erkli o'zgaruvchilar *x* va *y* ga bog'liq. Ulardan birortasini ikkinchisi orqali ifodalash uchun masalaning shartidan foydalanamiz. Shartga ko'ra maydonning bir tomoni tayyor uy (devor) bilan, qolgan uch tomoni uzunligi 120/7? panjara bilan chegaralanishi lozim, ya'ni x + 2y=120. Bundan x = 120-21- kelib chiqadi. x ning ushbu qiymatini S' yuzni topish formulasiga qo'yamiz. U holda S' = (120-2y)y - 120y-2y^2 bitta erkli o'zgaruvchining funksiyasi hosil bo'ladi. Endi shu S(j/) funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

S'(.y) = 120-4V, £'(.)') = (120-41)' = -4,

S'(y) = 0 yoki l20-4v = 0 dan 4y = l20; ,v = 30 yagona kritik nuqta kelib chiqadi.

S''(30) = -4<0 bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartga ko'ra x=30 qiymatda funksiya maksimumga ega. Bu yagona maksimum uning eng katta qiymati ham bo'ladi. Shunday qilib bir tomoni uy bilan qolgan uch tomoni 120 *m* uzunlikdagi panjara bilan chegaralangan to'rtburchak shaklidagi maydonlar orasida eni y-30/». bo'yi (uzunligi) x = 120-2 - 30 = *60m* bo'lgan maydon eng katta S - 60-30/»' - 1800/» yuzga ega bo'I ar ekan.

2- niasala. 180 soni ko'paytmasi eng katta va ulardan ikkitasi 1:2 nisbatda bo'lgan uchta qo'shiluvehiga ajratilsin.

I Yechish Faraz qilayiik 180^x + .y + z ko'rinishda tasvirlansin. Shartga ko'ra > sonlardan ikkitasi, masalan *x,y* 1:2 nisbatda, ya'ni -^ = 1, *y = 2x* bo'lishi u holda 180 = x + 2x + z yoki I80 = 3x + z,z = I80-3x hosil bo'ladi. Demak $_{x\ +}$ 2л.- + (180-3x) ko'rinishdagi uchta *x, 2x.* 180-3x qo'shiluvchilarga ajratildi. Shularning ko'paytmasi ....

$_v$.2x(180-3x) = 360x^2 -6x ifodaning eng katta qiymatini topishinuz kerak. $_v$>$_{(x})$ = 720x-18x^2; v'‘(x) = 720-36x; v'(x) = 0 yoki 720x-18x^2 = 0; dan

720

$_x$.(720-18x) = 0; x*0bo'lgani uchun 720-18x = 0; x = ~ = 40 kritik qiymat kelib chiqadi. v"(40) = 720-36-40 <0 bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga binoan x=40 qiymatda v = x-2x-(180-3x) funksiya eng katta qiymatga ega bo'ladi.

Demak, y = 2x = 2-40 = 80, z = 180-3x- 180-3-40 = 60. Shunday qilib, 180 soni 40, 80, 60 sonlarning yig'indisi ko'rinishida tasvirlanganda qo'shiluvchilardan ikkitasi 1:2 nisbatda bo'lib, qo'shiluvchilarning ko'paytmasi eng katta bo'lar ekan, ya'ni = 40 80 • 60 = 192000.

3- masala. Marvaridni bahosi uning massasi kvadratiga proporsional. Ishlov berish vaqtida marvarid ikki bo'lakka ajralib ketdi va natijada eng ko'p qiymatini (bahosini) yo'qotdi. Bo'laklarning massalari topilsin.

Yechish. Marvaridning massasini *m,* bahosini *z,* bo'laklarning massalarini WpWjO/z,+w$_2$ =z?;) va ularning baholarini mos ravishda z.,z, orqali belgilaymiz. U holda butun marvaridning bahosi z = aw^2 bo'laklarning baholari esa *z, = a ■ m^2,z, - a ■ m,^{2}* bo'ladi, bunda *a* > 0-proporsionallik koeffitsienti. Shartga ko'ra, butun marvaridning bahosi z = a-/»^{2} bilan siniq ikki bo'lak marvaridning bahosi *a/nf+am,^{2}* orasidagi farq y = a w'-«-(/и/+/n$_2$^{2}) eng katta ekanligi bizga ma'lum, *m = m}+m2* yoki *m2=m-m^* ekanini hisobga olsak

У - or nr - a ■ (m^2 + m,') = ■ m^2 - a ■ m^2 - a ■ (m - m$_t$)^2 =

= a-w^2 *-am^2-am^2 + 2a m m, -am^2 = 2a(m -m^2)* kelib chiqadi. Bu yerda

w? o'zgarmas miqdorlar, *m$_y$* эca o'zgaruvchi miqdordir. Endi y(w$_t$) funksiyaning eng katta qiymatini topamiz. y'= *2a(m- 2m^y,y"-* -4a.

yoki $m-2m_1=0$ dan $m_1=\frac{m}{2}$ kritik qiymat kelib chiqadi. $y''\left(\frac{m}{2}\right.$ *y\m$_x$*) = 0

--4a<0 bo'lgani

uchun ikkinchi yetarlilik shartiga ko'ra *;• -2a{mm} 2m^2)* funksiya ш, - ^{w} qiymatda maksimumga ega

bo'ladi. Demak, marvarid teng > w.=/n, = - ' ikki bo'lakka

" I ' ' 2 J

bo linganda o'zining eng ko'p bahosini yo'qotar ekan.

4- masa!a. Jism v$_{tl}$ - *ffimlsek* tezlik bilan tik yo'nalishda yuqoriga otilgan. Jismningeng yuqori ko'tarilish balandligi topilsin.

Yechish. Fizika kursidan ma'lumki tik yo'nalishda yuqoriga v„ boshlang'ich tezlik bilan otilgan jismning harakat tenglamasi *H = vj-~-* bo'ladi. Bunda *H-*

otilgan jismning yerdan balandligi, g^\0m/sek'~ erkin tushish tezlanishi, / esa sarflangan vaqt. Masalaning shartiga asosan $v_{,,}$ = 60m/sek va binobarin $H = 60t-5r$. Endi shu $H(t)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz //'(/) = 60-10/; //"(/) = -10.

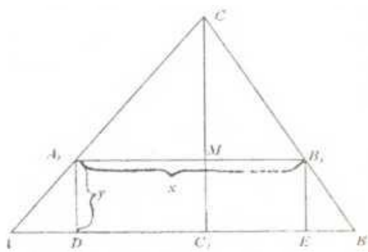
H'(/) = 0yoki 60-10/= 0 dan 10/= 60, / = 6 kritik nuqta kelib chiqadi.
W’’(6) =-10 < 0 bo’lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga asosan / = 6 qiymatda
H =60/-5/^{2} funksiya maksimumga ega bo’ladi. Demak,
/7$_{lim}$ = // (6) = 60 • 6 - 5 • 6$^?$ = 180 (//?).

Shunday qilib v_0 = 60 ml сек tezlik bilan yuqoriga tik otilgan jism taqriban 6 sek.dan so’ng cngyuqori balandlikka ko’tarilar ekan.

5- masala. Asosi a va balandligi h bo’lgan uchburchakka eng katta yuzli to’g’ri to’rtburchak ichki chizilgan. To’g’ri to’rtburchakning yuzi aniqlansin.

YechishM5C(I19-chizma) uchburchakka ichki chizilgan to’g’ri to’rtburchakning tomonlarini x va 7 orqali belgilaymiz. U holda to’g’ri to’rtburchakning yuzi 5 = лт bo’ladi.

ABC va ЛДС uchburchaklarning



119-chizma.

o’xshashligidan = (|)

AB CC,

proporsiya kelib chiqadi. Masalaning shartiga ko’ra $AB = a$, CC_t - h.
Belgilashimizga asosan $A_tB_{\}}$ = x, B_tE = MC_i = y, CM =$CC_{\}}$ -CM =h-y bo’lgani uchun (1) munosabat quyidagi ko’rinishga ega bo’ladi.

.v *h - y a h ’*

bundan x-—$(h-y)$ kelib chiqadi. x ning ushbu qiymatini S = .vy ga qo’yib h

S - — (h-y)y = ^{a}-*(hy-y')* bir o’zgaruvchining funksiyasiga ega bo’lamiz. h *li*
Endi shu $S(y)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

SV) = 7(A-2y), r(T) = -v-
h *h*

S\y) -0 yoki -(/;-2y)--0 dan //-2y = 0, > = - kritik qiymat kelib chiqadi.
h *2*

- I -<0 bo’lgani uchun ikkinchi vetarlilik shartiga ko’ra $(y) funksiya

У = ~ maksimumga ega bo’ladi. Bu yagona maksimum uning eng katta qiymati ham bo’ladi. Shunday qilib uchburchakka ichki chizilgan to’g’ri to’rtburchaklardan asosi x = v) = -I/z--l = - ᵛᵃ balandligi y = - bo´lgan to´rtburchak eng katta >´ h\ 2/2

AM 2

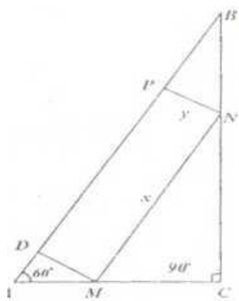
bo'lar"ekan. Bu to'rtburchaknin g yuzi esa S = ~

bo'ladi. VllZga eg* 4

6- masaIa. Gipotenuzasi 24sm, burchagi 60"to'g'ri burchakli uchburchakka j gipotenuzada bo'lgan to'g'ri to'rtburchak ichki chizilgan. Shu to'g'ri to'rtburchak eng katta yuzga ega bo'lishi uchun uning tomonlari qanday bo'lishi kerak?

Yechish. To'g'ri to'rtburchakning tomonlarini *x* va *y* orqali belgilaymiz. U holda uning yuzi 5 = xy bo'ladi. Endi *y* ni x orqali ifodalaymiz.(120-chizma).

Shartga ko'ra *AA* = 60°, *AC* = 90°. Demak /д = 30°. Ma'lumki to'g'ri burchakli uchburchakning 30" li burchagi qarshisidagi tomoni gipotenuzaning yarmiga teng. Shuning uchun *AC* = =*y* = *\2(sm).* To'g'ri burchakli uchburchak *MNC* ning 30" li burchagi qarshisidagi *MC* tomoni uning gipotenuzasi *x* ning yarmiga teng, ya'ni *MC* = . Demak *AM* = *AC*- *MC* = 12--|.



120-chizma.

A *ADM* dan *AD* =.

2

Pifagor teoremasiga ko'ra y^2 = DM^2 = AM^2 - AD^2 = AM^2

/W = 2 j) = ^f6"4) bo›ladi,

(*AM У* 3 ,,,, . -

- — --/W-yoki

к 2 *J 4*

Demak, to'g'ri to'rtburchakning yuzi S = xv -- лTз! 6 ~

7з! 6x

Endi shu S(x) funksiyaning eng katta qiymatini topamiz. bo'ladi.

S'(x) = Vif6-~ j. S*(x) = -2 S'(.x) ■- 0 yoki 6-^ = 0 dan A--I2 kritik qiymat kelib chiqadi.

5'(12)-- -—-<0 bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga ko'ra

i(-v) - VJ^x - 2- J - v3^6 -Jx funksiya bo'ladi. л̄12 qiymatda maksimumga ega

Shunday qilib, uchburchakka ichki chizilgan va bir tomoni tilling 24 sm li gipotenuzasi da bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan tomonlari x=l2,

.y = -Уз^6-^ = з7з ga teng bo'lgani eng katta yuzga ega bo'lib,

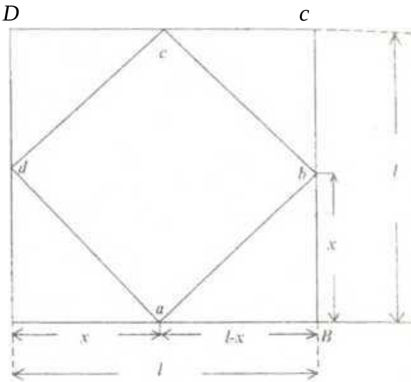
= 12-3л/з =3б7з {sm^2} ga teng ekan.

7-masala. *ABCD* kvadrat berilgan. Lining uchlaridan bir xil *Aa, Bb, Cc B>d* kesmalar ajratilgan va *a, b, c, d* nuqtalarni birlashtirib kvadrat hosil qilingan. *Aa* ning qanday qiymatida *abed* kvadratning yuzi eng kichik bo'ladi(121-chizma).

Yechish. Ла = x, Л5 = f deb belgilasak, afi=f-x va Pifagor teoremasiga ko'ra ah^2 =x^2+(i?-x)^2 =x^2+f^2-2£x + x^2 =2x^2-2fx + £^{2} bo'ladi. Tomoni *ab* ga teng *abed* kvadratning yuzi 5' = *ab'* ga teng. Demak, S = 2л^2 - 2£r + f^2.

Endi shu S(x) funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz. S'(x) = 4x *-21, S"(x)* = 4. $'(x) = 0 yoki *f AR*
4x-2(? = 0 dan x = - = — kritik 2 2

qiymat kelib chiqadi. S'j— 4 > 0 bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga binoan S - 2x^2 -26x + f^2 £ funksiya x = - qiymatda eng kichik qiymatga ega bo'ladi. Shunday qilib, *ABCD* kvadratga masalaning shartida ko'rsatilgandek qilib ichki



121-chizma.

chizilgan kvadratlardan *ABCD* kvadrat tomonlarini o'rtasini birlashtirib hosil qilingan kvadrat eng kichik yuzga ega bo'lar ekan.

8-masala. Tagi kvadrat shaklidagi, hajmi 108 /n^3 ga teng ochiq hovuzning o'lchovlari shunday aniqlansinki, uning devorlari bilan tagini qoplash uchun munikin qadar oz material sarf etilsin. Hovuzning o'lchovlari deganda uning tagini tomonlari va balandligi (chuqurligi) tushuniladi.

Yechish. Hovuz tagini tomoni *x* orqali va hovuz balandligini *h* orqali belgilaymiz. U holda hovuz parallelepiped shaklida bo'lgani uchun uning hajmi *v-x'h* bo'ladi. Shartga ko'ra x^{2}й = 108. Hovuz tagi x^2, devori 4x7? yuzga ega bo'lgani uchun jami S-x^2 +4x/? yuzni material bilan qoplash lozini. Syuzni birgina erkli o'zgaruvchining funksiyasi sifatida ifodalash uchun x'7?-108 tenglikdan topilgan qiymatni unga qo'yamiz. U holda S = лi-4x--^ - x' + ^{4} " kelib
x' x' v
chiqadi. Endi shu S(x) funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz

5'(x)-2x-= 0 dan 2x^l-432 = 0; x'= 216, x = 6 kritik nuqta kelib chiqadi.

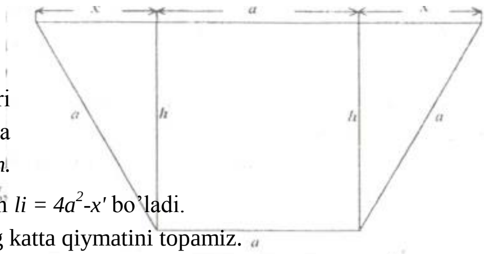
Ikkinchi liosila ,S"(6)-2i -^{64} >0 bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga asosan
216
43^
x = 6 qiymatda S(x) = x' '+—- funksiya eng kichik qiymatga ega bo'ladi.
x

Demak, hajmi 108 м' ga teng ochiq hovuzning tagi tomoni *6m* bo Igan kvadratdan iborat, balandligi /? = —^{8} = 3/» bo'Igandagina lining devorlariga ishlov 36

nhnn en° kam material sarflanar ekan. Ya'ni hovuzning o’lchovlari berisn испив &
Lx6/»x3/н bo’hshi lozim ekan.

9 masala- Trapetsiyaning kichik asosi va yon tomonlarining har biri *a* ga teng. Lining katta asosi shunday aniqlansinki, trapetsiyaning yuzi eng katta bo’lsinf 122- chizma).

Yechish. Chizmaga binoan trapetsiyaning katta asosi 2л a ga teng. Trapetsiyaning balandligini *h* orqali I ~ trapetsiyaning yig’indisining



• i

belgilaymiz. Ma‘lumki yuzi asoslari yarmi bilan balandligi ko’paytmasiga teng.

ya П1 ------~ ---- *h-(x + a)h.*

Pifagor teoremasiga ko’ra chizmadan $li = 4a^2 - x'$ bo’ladi.

Endi shu S(x) funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

„ , r~i ------ 7 , . -x a^2 x^2-x(x + a) -2x^2 -ax + a

S (x) = *y a~* - x* + (x + tz)-y==^=-=- —==------ = ----- 7^7 ---; -

vcr-x' *yja~-x~* $-x^2$

’ bo’lgani uchun trapetsiyaning yuzi 5

$= \frac{a}{2}$ x $\frac{a}{2}$ kritik qiymatga ega bo’lamiz. Hosilani $\frac{-2\left(x-\frac{a}{2}\right)(x+a)}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ko’rinishda

tasvirlasak $< \frac{a}{2}$ bo’lganda x-—<0 va S'(x)>0 ekani kelib chiqadi. Xuddi

= (x + a)T^

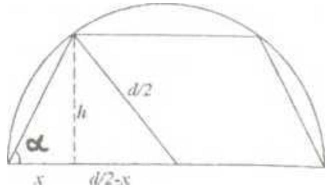
= -*a* kelib chiqadi. Masalaning shartiga ko’ra x>0 bo’lgani uchun shuningdek x>— bo’lganda5"(x)<0 ekani kelib chiqadi. S'(x) hosila x=^ kritik qiymatning chap tomonidan o’ng tomoniga o’tganda o’z ishorasini «+» dan «-» ga o’zgartiradi. Shuning uchun birinchi yetarlilik shartiga ko’ra *S-{x + a)4*a^2~-x^2

funksiya x ~ - qivmatda maksimumga ega bo’ladi. Bu vagona maksimum lining eng katta qiymati ham bo’ladi. Shunday qilib trapetsiyaning katta asosi ~ *a*

lx \ a- 2-- \ *a hi* bo’lganda u eng katta vuzga ega oo’lar ekan.

Izoh. Masalaning natijasidan kanal qazish ishlarida, tarnov yasash va hokazolarda foydalanish munikin.

IO-masala Yarim doiraga asosi yarim doira diametridan iborat bo’lgan trapetsiya ichki chizilgan. Trapetsiyaning asosiga yopishgan burchagi qanday bo’lganda eng trapetsiyaning yuzi katta bo’Iadi(123-chizma).



123-chizma.

Yechish. Doiraning diametrini *d,* trapetsiyaning balandligini *h,* trapetsiya yon tomonining katta asosidagi procksiyasini *x,* shu tomon bilan asos orasidagi burchakni *a* deb olamiz. U holda trapetsiyaning kichik asosi *d-2x,* balandligi *h - xtga* va yuzi

S = ^~~~^X'h = {.d-x)xtga bo’ladi.

Ikkinchi tomondan chizmadan Pifagor teoremasiga ko’ra

$$h^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}-x\right)^2=dx$$

ga ega bo’lamiz. Bunga *h - xtga* qiymatni qo’ysak

x ^{2}/g^{2}a = J ■ x - x˜; x ˜/g^{2}a + x˜ = <7 • x; x $^?$(1 + /g ^{2}a)= J ■ x; x --- -:— - *d, x = d* cos^2 *a*
cos ‘ *a*

kelib chiqadi. Shunday qilib,

S = *(d - x)xtga* = (c/~ <7cos^2 aV/cos^2 a-^--- = <v(l - cos^2 *a\d* cos *a* - sin *a -d^2 sm^2 a* cos *a* cos a bo’ladi.

Endi *S(a) = d^2* sin’ *a* cos *a* funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

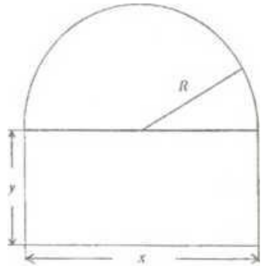
S’(a) - d^2 (sin ’ *a* cos *a) =* J^2(3sin^{2}acos^{2}a -sin^{4}a) =J^{2}sin^{2}acos^{2}a(3-/g^{2}a)

S'(cd) = 0 yoki *d^2* sin^2 acos^2 a(3-/g^{2}a) = 0 dan sin^{2}acos^{2}a*0 bo’lgani uchun 3-/g^{2}a = 0; /g^{2}a = 3,/ga = ±V3 kelib chiqadi. Shartga ko’ra 0<a< — bo’lgani sababli /ga = V3, *a* = 60" kritik qiymatga ega bo’lamiz. 0<a<60” bo’lsa *tga < tgGO"* ~ A/3, *tg^{2}a* <3,3-*tg^{2}a* > 0 va .S’’(a) = <7^2 sin^2 acos^2 a(3-/g^{2}a)> 0 bo’ladi.

60"<a<90" bo’lganda /g60^n </ga; V3 </ga; 3 </g^{3}a; 3-/g^{2}a <0 bo’lib, *S'(a)* <0 bo’ladi, chunki *y-tgx* funksiya o’suvchi. S(a) funksiyaning hosilasi *a* = 60” kritik qiymatning chapidan o’ngiga o’tganda ishorasini “+” dan ga o’zgartirganligi uchun birinchi yetarlilik shartiga binoan funksiya a = 60” bo’lganda lining yuzi eng katta bo’lar ekan.

11-masala.Tunnelning ko’ndalang kesimi bir tomoni yarim doiradan iborat to’g’ri to’rtburchak shakligaega. Kesim perimetrii 25//?. Yarim doira radiusi qanday bo’isa, kesim yuzi eng katta bo’ladi(124-chizma).

Yechish. Aylana uzunligini topish formulas! O-2Л) ga binoan yarim doiraning uzunligi «-«(«-yarim doiraning radius!). To'g'n to'rtburchakning asosim *x*, balandligmi v orqali belgilasak kesimning perimetri shartga ko'ra *x + 2y + 7tR-25* (a) bo'ladi. Kesimning yuzi to'g'ri to'rtburchak yuzi bilan yarim doira yuzining yig'indisidan iborat, ya'ni 5 = xy + l^2 (/?) bo'ladi.



124-chizma

x = 2R bo'lgani uchun (a) dan *2R + 2y±* = 25; *y* -■ 12,5 - ~~ *R* kelib chiqadi. *y* ning topilgan qiymatini (/?) ga qo'yamiz. U holda S = 2//12.5-—= к 2

$25R-(\pi+2)R^2+\frac{1}{2}\pi R$ bir o'zgaruvchi *R* ning funksiyasi kelib chiqadi. Endi shu *S(R)* funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

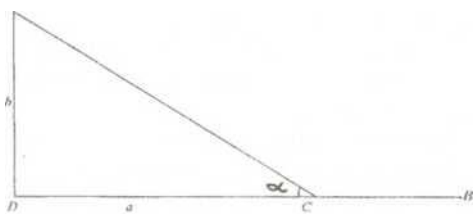
S'(R) = 25 -2(я *+ 2)R +* лЯ; *S''(R) = -2(mг* + 2)+ *n - -n* - 4 = -{*it* + 4). 5'(Я) = 0 yoki

25 - 2(тг + *2)R + nR* - 0 dan *25-кR-4R = 0;R* = ------®3,5 kelib chiqadi.
я + 4

S''(R) = -(я- + 4)< 0 bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga asosan funksiya *R=3,5m* bo'lganda tunnel kesimining yuzi eng katta bo'lar ekan.

12-masala. *A* zavodga yaqin bo'lgan joydan berilgan to'g'ri chiziq bo'yicha *B* shaharga qarab temir yo'l o'tqazilgan. Agar bir tonna yukni bir km ga tosh yo'l bo'yicha tashish temir yo'l bo'yicha tashishga qaraganda *m* marta qimmatroq bo'lsa, *A* dan *B* ga yuk tashish eng arzon bo'lishi uchun, *A* zavoddan temir yo'lgacha tosh yo'lni temir yo'lga nisbatan qanday *a* burchak ostida o'tkazish kerak?(125-chizma).

Yechish. *A* zavoddan temir yo'lgacha masofani *b (AD=b), D* dan *B* gacha masofani a, tosh yo'l bilan temir yo'l orasidagi burchakni *a* orqali belgilaymiz. 1 tonna yukni tosh yo'lda 1 *km* ga tashish uchun *d* so'm sarfbo'lsin.



125-chizma

U holda 1 tonna yukni temir yo'lda 1 km ga tashish uchun ~ so'm *m* sarflanadi.Yuk *A* dan *B* gacha *AC km* tosh yo'lda, *CB km* temir yo'lda tashiladi. *&ACD* dan trigonometrik funksiyalarning ta'rifiga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz. *AD* . *AD* *b DC*
AC = sin *a, AC* = ------ = —,--------- - *ctga ; DC = ADciga = bctga .*
sincr sina *AD*

Demak *CB - DB-DC -a bctga.* Shunday qilib tashilgan yuk *A* dan *B* each ЛС = -Д- km.ni tosh yo'lda o’tib uni tashishga —— so’mni *CB=a-hctw* ■ sin a sin 5ᶦмп.п|

temir yo’lda o’tib uni tashishga *(a-bctga)*— so'm sarflanadi. U holda yukni tashish uchun hammasi

bo’lib *f (a)* =---+ *(a - bctga)*— so’m pul sarflanadi. Endi *a b d m* larni o’zgarmas hisoblab /(«)

funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz.

I

. *bdcosa bd , A-mcosa* -cos a

f (a) = ; -- 1- —,—*r*- = *bd*—— ------ = *mbd*——; -----. /'(a) - 0 yoki

sura »zsm’a sm *a* sin "a

— -cosa-0 dan cosa = —; a^arccos— kritik qiymat kelib chiqadi. cost? funksiya *nt* *tn*

nt

0; — ! da kamayuvehi ekanini hisobga olsak *a* < arccos— bo’lganda cos» > ' :

2 J *m* *m*

1

-cos«]

— cosacO, *f'(a}* = *mbd*——; <0 va *a* > arccos—bo’lganda cos *a* <—; *tn* *sin a* *in*

in

—-cosar>0, *J'(a)>0* kelib chiqadi. Hosi la *a* = arccos- kritik nuqtaning chapidan *til* *HI* o’ngiga o’tganda ishorasini dan “+”ga o’zgartirganligi uchun birinchi yetarlilik shartiga ko’ra funksiya shu qiymatda minimumga ega bo’ladi.

Shunday qilib yukni *A* zavoddan *B* shaharga tashish eng arzon bo’lishi uchun tosh yo’lni temir yo’lga « = arccos— burchak ostida qurish lozim ekan.

m

Hususiy holda yukni tosh yo’lda tashish temir yo’ldagiga qaraganda 5 marta qimmat bo’lganda eng kam xarajat qilish uchun tosh yo’lni temir yo’lga *a* - arccos - « 78° burchak ostida o’tkazish kerak ekan.

5

13- masala. Sayyoh *A* manzildan chiqib tosh yo’l bo’ylab shu yo’ldan 8 km chetda joylashgan va *A* dan to’g’ri chiziq bo’yicha 17 km uzoqlikda joylashgan *B* manzil tomon bormoqda. Sayyoh *B* manzilga tezroq yetishish uchun tosh yo’lning qaysi joyidan *B* manzilga burilishi kerak?(126-chizma). Sayyoh burilgandan so’ng *B* manzilgacha yo’lsiz yuradi.

Sayyohning tosh yo’ldagi tezligi 5 km/soat, yo’lsiz joydagi tezligi 3km/soat.

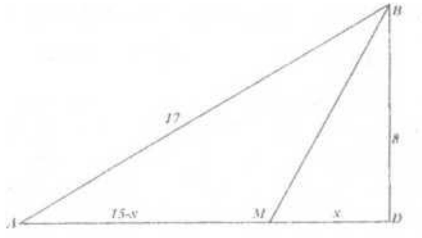
Yechish. Aytaylik sayyoh tosh yo’lning Л/ nuqtasidan *B* manzilga burilsin. Chizmadagi Z) nuqta bilan /V/ nuqta orasidagi masofani x orqali belgilaymiz.

To’g’ri burchakli <*BAD* dan Pifagor teorcmasiga asosan

/lD = V^S^2^7^ = 717:-8> =7289^64 =V225~ = 15, ya'ni JD=15km kelib chiqadi.

. Л va *M* orasidagi masofa Pf/na*AD-MD*-15-Л ga teng. *AMB* hrutni o'tish uchun sarflangan ,1ia7ni / orqali belgilaymiz. Sayyoh V(v 15-x toshyo'lni 5km/soat tezlik

15-x <l = - formulaga asosan) bilan —— v v vaqt oralig'ida bosib o'tadi. AWZ) dan Pifagor __ teoremasiga ko'ra IWS = V8²7x² bo'ladi.



126-chizma.

Yo'lning *MB* qismida 3km/soat tezlik bilan harakat qilgan sayyoh uni —• --- vaqt oralig'ida bosib o'tadi. Demak *AMB* marshrutni o'tish uchun sayyoh jami t = vaqt sarflaydi. Ushbu /(x) funksiyaning eng kichik qiymatini

5 3

topamiz. . .----------------- 1 z г 1 / *rr*. I 1 (б4 + x²) 1 x -зТб4 + x'+5x

U 5V 3V 7 5 3 2^64+ x² 5 3^64 + x² 15^64 +

f(x) = 0 yoki -3-/64 + X² +5x = 0 dan 3^64 + x² - 5x;

9 64 + x² = 25x²; 9 ■ 64 + 9x² = 25x²: 9 ■ 64 = 16x²; x² = 0,• 64 ; x² = 36, x

V , 16 kritik qiymat kelib chiqadi (chunki A- > 0).

7б4 + x² _ 1 64 + x²-x² _ 64

"р64 + x²J 3 (б4 + x²)² з(б4 + x²)²

/'(6) = —_ = _^i>0 bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga asosan

3(64 + 36)' 3000

x=6 qiymatda r(x) funksiya eng kichik qiymatga ega bo'ladi. Shunday qilib, sayyoh *A* manzildan 15-6=9(km) yurgandan so'ng *B* manzilga buri Isa u eng kam vaqt

15- x Tб464 + x² 77

— soat+л-² (r«5soatu 8 minut) sarnar ckan.

15

Mustaqil yechish uchun mashqlarva test savollari

1. Berilgan S yuzga ega barcha to'g'ri to'rtburchaklardan kvadrat eng kichik perimetrga ega ekanligi isbotlansin.

Ko'rsatma. To'g'ri to'rtburchakning bir tomonini л desak, ikkinchi tomonini *y* = ~, perimetri *p* = 2-\x + —\ bo'ladi. Javob: x = 7S'; v = 7s

x I *)

2. *P* perimetrli barcha to'g'ri to'rtburchaklar orasidan kvadrat eng katta yuzga ega ekanligi isbotlansin.

Ko'rsatma. To'g'ri to'rtburchakning bir tomonini x, ikkinchi tomonini

j = —-x,yuzi 5 = x- —-x bo'ladi. Javob: x = —: y = —

P • (D \ P P

2 U) 4 ? 4

3. Uchburchakning asosi *a* ga, perimetri esa *P* ga teng. Uchburchakning qoluan ikki tomoni shunday aniqlansinki, uning yuzi eng katta bo'lsin.

Ko'rsatma. Uchburchakning ikkinchi tomoni *b=x* desak, uchinchi tomoni *c*-P-a-xbo'ladi. Geron formulasiga ko'ra uchburchakning yuzi S = *JP(P-a)(P - b)(P-c)* yoki, belgilashimizga binoan,

S = yjP{P -a)(P - x)(a + x), (0<x<P) bo'ladi. 5 yuzning eng katta qiymatini topish kerak. Buning uchun *f (x) = (P-x\a* + x) funksiyaning eng katta qiymatini topish yetarli.

Javob: *b = c~* —— , ya'ni uchburchak tengyonli bo'lishi kerak.

4. Uchburchakning bir tomoni *a* ga va uning qarshisidagi burchagi *a* ga teng. Uchburchakning qolgan ikki burchagi shunday aniqlansinki, uning yuzi eng katta bo'lsin. Javob: x = -(л--a); y = - (я-- a), uchburchak teng yonli bo'ladi.

5. v hajmga ega yopiq silindrik idish(bak) tayyorlash talab etiladi. Idishni tayyorlashga eng kam material sarflanishi uchun uning o'lchamlari qanday bo'lishi kerak? Javob: *R - ' —, H -2R, H : R-2,* bunda R silindr radiusi H esa balandligi.

V *2mг*

6. S to'la sirtga ega silindrning hajmi eng katta bo'lishi uchun uning (radiusi *R* va balandligi /7) o'lchamlari qanday bo'lishi kerak?

Javob: *R* = /7 = *2R,H.R* = 2.

UTT

7. Berilgan hajmga ega to'g'ri doiraviy konusning yon sirti r^2:$й^2$:$?^3$ =1:2:3 munosabat bajarilgandagina eng kichik bo'lishi isbotlansin. Bu yerda asosining *r* -konus

Javob:

r $\sqrt[3]{\frac{3v}{\sqrt{2}\pi}}$ radiusi, $\sqrt[3]{\frac{3v}{\sqrt{2}\pi}}$ /7-konusning balandligi, e-konusning yasovchisi.

= *f = J}.* , r^1 :h^2 -$Л^2$ =1:2:3.

V *л*

8. O'lchamlari 80smx50sm bo'lgan to'g'ri to'rtburchakli tunuka Tunukaning berilgan. to'rtta uchidan kattaligi bir xil kvadratlar kesib olinib, qolgan qismdan qopqoqsiz to'g'ri to'rtburchakli quti yasalgan. Qutining hajmi eng katta bo'lishi uchun kesib tashlangan kvadratning tomoni qanday bo'lishi kerak? Javob: lOsm.

9. Berilgan doiraga eng katta yuzga ega to'g'ri to'rtburchak ichki chizilsin. Javob: tomoni *R42* bo'lgan kvadrat, bunda R doiraning radiusi

10. Berilgan *R* radiusli sharga yon sirti ene katta bo'lgan silindr ichki chizilsin. Javob: *r* --- -

/?, Л- *-J2R,* bunda r silindrning radiusi h esa uning balandligi.

11. *(a.b)* intervaida differentsiallanuvchi /(x) funksiya uchun quyidagi mulohazalardan qaysi biri bajarilmaydi?

A) (a;i) da /'(x)>0 bo'lganda /(x) funksiya shu intervaida o'sadi

B) *(a;b)* da /'(x)<0 bo'lganda *f(x)* funksiya shu intervaida kamayadi

f•{x)= O bo'lsa $X = x_0$ /(x) funksiyaning kritik nuqtasi bo'ladi

E) v_ ". kritik nuqtadan o'tganda /'(x) hosila ishorasini o'zgartsa x = x,, nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'ladi

F) f'(x,.)=0 bo'lganda x = x_0 nuqta /(x) funksiyaning ekstremum nuqtasi

°° 12 /•(x) = 2x' + 27x^2 + 48x-II funksiyaning monotonlik oralig'ini toping.

A) (-oэ;-1); (-1; 8); (8;+co)

B) (- co; 1); (l; 8); (8;+«>)

D) (-co; 0); (0; + °o)

E) (-co;-4); (-4; 4); (4;+oo)

F) (-co;+co).

13. /(x) = x' + 15x^2+63x + 12 funksiyaning ekstremumlari topilsin.

A) y_{nwx} = v(- 3) = -69; ,y = ,y(- 7) = -37

B) y_{nKK} = X0=91; y_{min} = j'(0)=12

D) .У $_{,1MX}$ = J'(2) = 206; y_{min} = j(- 2) = -62

E) $y_{тах}$ = Я2)=206; y_{mil}, = .y(-7)=-37

F) funksiya ekstremumga ega emas.

14. Yasovchisi ? = 18S/H bo'lgan konus shaklidagi idishning balandligi qanday bo'lganda u eng katta sig'imga ega bo'ladi.

A) *h = f>y2sm* B) *h - 5^/2sm* D) *h-lsm* E) *h-(d'ism* F) *h = 8sm.*

15. /(x) = x'-2x + l funksiyaning [-1,5; 2,5] kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari topilsin.

A)7,125;-l B) 9,125;-1 D) 9,125;-2 E) 8,125; 1 F) 8; 2.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. O'suvchi va kamayuvehi funksiyalarni ta'riflang.
2. Funksiya o'suvchi bo'lishining zaruriy va yetarlilik shartlarini ayting. Bu teoremaning geometrik mazmuni nimadan iborat?
3. Funksiya kamayuvehi bo'lishining zaruriy va yetarlilik shartlarini ayting. Bu teoremaning geometrik mazmuni nimadan iborat?
4. Funksiyaning maksimumi va minimumi nima?
5. Funksiyaning maksimumi va minimumi hamda eng katta va eng kichik qiymatlari orasida qanday farq bor?
6. Ekstremum mavjudligining zaruriy shartini hamda uning geometrik mazmunini ayting. Zaruriy shartni yetarli cmasligini ko'rsatuvchi misoliar keltiring.
7. Kritik nuqtani ra'riflang.
8. Ekstremum mavjudligining birinchi yetarlilik shartini ayting.
9. Funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari qanday topiladi?
10. Ekstremum mavjudligining ikkinchi yetarlilik shartini ayting.
11. Differensiallanuvchi funksiyaning ekstremumini izlash qaysi sxema asosida olib

<u>27-ma‘ruza.</u> Mavzu: Funksiyaning grafigini chizish. Reja:

1. Funksiya grafigining qavariqligi va botiqligi. Egilish nuqta.
2. Egri chiziqning asimptotalari.
3. Funksiyani to’la tekshirish va grafigini chizish.

Adabiyotlar: 1,2,4,5,6,8,9,11,13,14,15.

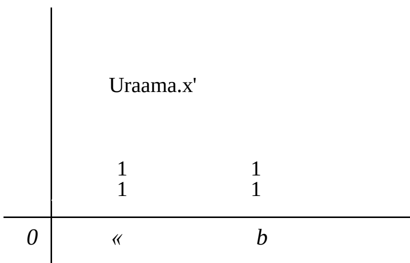
Tayanch iboralar: botiq, qavariq, egilish nuqta, asimptota, vertikal va og’ma asimptotalar, to’la tekshirish.

27.1. Funksiya grafigining qavariqligi va botiqligi. Egilish nuqta

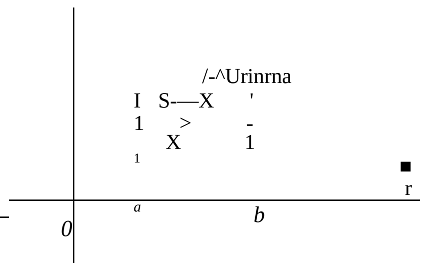
(a; *b)* intervalda differensiallanuvchi *y*- /(x) funksiyaning grafigini qaraymiz. v = *f(x)* funksiya grafigining (a; 6) intervaldagi urinmasi deyilganda grafikning abssissasi *(«; b)* intervalga tegishli istalgan nuqtalarida grafikka o’tkazilgan urinmalar tushuniladi.

1- ta‘rif. Agar (a; *b)* intervalda differensiallanuvchi y- /(.v) funksiyaning grafigi o’zining shu intervaldagi har qanday urinmasidan pastda joylashsa, u holda bu funksiyaning grafigi *(a: b)* intervalda **qavariq** deyiladi(127-chizma).

2- ta‘rif. Agar (a; *b)* intervalda differensiallanuvchi y-/(.v) funksiyaning grafigi o’zining shu intervaldagi har qanday urinmasidan yuqorida joylashsa, u holda bu funksiyaning grafigi *(a; b)* intervalda **botiq** deyiladi(128-chizma).



127- chazma.



128 - chizma

3-ta‘rif. Uzluksiz funksiya grafigining qavariq qismini botiq qismidan ajratuvchi nuqtasi grafikning **egilish nuqtasi** deyiladi. (129-chizma).

129- chizrna

Funksiya grafigining botiqlik, qavariqlik intervallari hamda grafikning egilish nuqtalarini aniqlash funksiyaning ikkinchi hosilasidan foydalanib amalga oshiriladi.

27 **1-teoreina.** Agar (a; *b)* intervalning barcha nuqtalarida /"(x) mavjud va /r-4 •)<*() bo’lsa, u holda (a; Л) intervaida y = /(x) funksiyaning grafigi qavariq bo ^**Isboti.** *(a; b)* intervaida /"(x)<0 bo’lsin. *(a; b)* dan ixtiyoriy x = x,, nuqtani olib Л/ (v /(*«))

nuqtadagrafikkaurinmao’tkazamiz(130-chizma).

Urinmaning *x* abssissaga mos ordinatasini)' orqali belgilaymiz. U holda urinmaning tenglamasi

У-/(x_0) = /*(*o)(*-*o) $y^{okl\ Y}$ = /k) + /’kX-V-$v_{I)}$) bo’lishi ravshan.

x nuqtada grafik va urinma ordinatalari ayirmasi *У-У* =

/(>') - - /'(xjx - ^{x}o) (27.2)

bo’ladi. /(x)-/(^{x}o) ayirniaga nisbatan Lagranj formulasini qo’Ilasak /•(x)-/(x_yi)s=/'(c$X^{x‹‹x}$o) bo’ladi, bu yerdagi *c* x_0 bilan *x* orasidagi qiymat. Ushbu qiymatni (27.2) tenglikka qo’ysak

У-У = /′ (c’X $^{x\ ‹‹\ x}$o) '' /’ (^{x}o X^x - ^{x}o)

yoki

y - *У* = L/($^{c'}$)-/'(^{x}o)X^{x}-^{x}<>) (27.3)

kelib chiqadi.

/'(c)-/'(x_n) ayirmaga nisbatan Lagranj formulasini qo’llab /'(c)-/'(x_0) = /"(c,Xc-$x_{()}$) tenglikni hosil Kilamiz, bu yerda c, *c* bilan x,, orasidagi qiymat. Oxirgi tenglikni hisobga olib (27.3) ni

y-У =/"(c,Xc-.v,,)(.v-x,,) (27.4)

ko’rinishda yozamiz.

x>x_0 bo’lsin. U holda x,,<c<x > bo’lib c-x_0 > 0,x-x,, > 0 va ($^{c–x}$oX^x-^{x}o)>0 bo’ladi.

^{x}<x,, bo’lsin. U holda *x<c<x₀* bo lib c- x_n < 0, x -x,, < 0 va (^{c}-x_0)(x - x_0) > 0 bo’ladi. Ushbu tengsizlikni hamda shartga ko’ra /"(c,)< 0 ekanini hisobga olib (27.4) dan y-)'<0 yoki y<У ga ega bo’lamiz.

Shunday qilib bir xil argument x ning o’zida funksiyaning ordinatasi *y* urinmaning ordinatasi)^{z}dan kichik ekan. I3u grafik urinmadan pastda yotishini ya‘ni giafik qavariqligini biidiradi.

27.2-teorema. Agar (a; *b)* intervalning barcha nuqtalarida /"(x) mavjud va /"(x)>o bo’lsa, u holda (a; *b)* intervaida *y* = /(.v) funksiyaning grafigi botiq bo’ladi.

Teoremaning isboti 27.1 teoremaning isbotiga o’xshaganligi sababli uni isbotlash o’quvchiga qoldirildi.

27.3-teorema. Agar f"(x,,) = O bo'lsa yoki /"(x_0) mavjud bo'lmasa va $_x$ nuqtadan o'tganda ikkinchi hosila o'z ishorasini o'zgartirsa, u holda srafiknino ЛД(x_0;/(x(.)) nuqtasi y = /(x) funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi.

Isboti. Masalan, x<x(, bo'lganda /"(x_o)<0 va x>x() bo'lganida /'"(x_0)>Q bo'lsin. U vaqtda *x* < x,, uchun grafik qavariq, x > x_0 uchun grafik botiq bo'ladi.

Demak, grafikning Л/(,(x_0;/(x_0)) nuqtasi uning qavariq qismini botiq qismidan ajratib turadi, ya'ni u grafikning egilish nuqtasi.

1- niisol. y = x^5-9x^2+5x+43 funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik intcrvailarini hamda egilish nuqtalarini toping.

Yechish. Ikkinchi hosilani topamiz:

y'=3x^2-18.V + 5, y"=6x-18. Ikkinchi hosilani nolga tenglashtirib hosil bo'lgan tenglamani yechamiz: y"= 0, 6x -18 - 0, x = 3.

x<3 bo'lganda y"= б(x-3) <0 bo'lganligi sababli (-a>;3) intervalda funksiyaning grafigi qavariq bo'ladi.

x>3 bo'lganda y"= б(x-3)>0 bo'lganligi sababli (3,+co) intervaldagrafik botiq bo'ladi.

y(3)-3'-9 3^2 +5-3 + 43 = 4 ekanligini hisobga olsak Д.(3;4) nuqta grafikning egilish nuqtasi ekanligi kelib chiqadi.

2- misol. y = lnx funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik intervallarini hamda egilish nuqtalarini toping.

Yechish. y = lnx funksiya (0,+oo) intervalda aniqlangan. Ikkinchi hosilani topamiz: y' = (lnx)

- -, y" = | —] =—^-<0.

x *\xj x*

Ikkinchi hosila (o. + дa) intervalda manfiy bo'lganligi sababli y = t'nx funksiyaning grafigi bu intervalda qavariq bo'ladi. Grafik egilish nuqtaga ega emas.

27.2. Egri chiziqning asimptotalari

y- j\x) funksiyaning grafigi *Oxy* tekislikdagi egri chiziqdan iborat bo'lganligi sababli(agar u mavjud bo'lsa) funksiya grafigi uchun aytilgan gaplar egri chiziq uchun ham o'rinli. Shutting uchun egri chiziq yoki funksiya grafigi deyilganda bir narsa tushuniladi.

4- ta'rif. Agar y = /(x) funksiya grafigining o'zgaruvchi nuqtasi grafik bo'ylab cheksiz uzoqlashganda undan biror to'g'ri chiziqqacha masofa nolga intilsa, bu to'g'ri chiziq r -- /'(x) funksiya grafigining asimptotasi deb ataladi.

Asimptotalar **vertikal** (ya'ni Oy o'qqa parallel) hamda og'ma (ya'ni *Oy* oqqa paralei bo'lmagan) asimptotalargaajratilib o'rganiladi.

1. Vertikal asimptotalar. Vertikal asimptotaning la rifidan, agar hni Дx) - yoki lim Дx) = co yoki lim Дx) = co bo'lsa, u holda x = x(! to'g'ri chiziq y =/(x) egri chiziqning asimptotasi ekanligi kelib chiqadi; va aksincha, agar x = x,, to'g'ri chiziq y-Дx) egri chiziqning vertikal asimptotasi bo'lsa, u holda yozilgan tengliklardan biri albatta bajariladi.

& v = /(v) egri chiziqning vertikal asimptotalarini topish uchun argument
I Ue z/ 4 funksiyani cheksizlikka aylantiradigan qiymatlarini topish kerak ekan (д- ning f(x> ' - 131-chizma).

3 misol $y = x$-- — funsiya grafigining vertikal asimptotasini toping.

= <x>, shu sababli x=-3 to'g'ri chiz.iq grafikning vertikal

Yechish.

asimptotasidir. ■ ....

4-misol. $y = ctgx$ funtsiya grafigining vertikal asimptotasini toping.

Yechish. lim c/gx = co, bo'lganligi sababli funksiyaning grafigi cheksiz ko'p vertikal asimptotalarga ega:

,v = 0, x = ±я\ x = ±2?г, -v = ±3яг,....

2. Og'ma asimptotalar. y ■- /(x) funksiyaning grafigi 0,y o'qqa parallel bo'lmagan asimptotalarga ega bo'lsin. U holda bu asimptotaning tenglamasi У = Ь + A ko'rinishga ega bo'lishi ravshan. Xususiy holda $\kappa = 0$ bo'lganda Ox o'qqa parallel gorizontal asimptota hosil bo'ladi. κ va b ni aniqlashga kirishamiz. Grafikning M nuqtasidan asimtotaga MN perpendikulyar o'tkazamiz(l32-chizma). Asimptotaning ta'rifidan lim MN = 0 ekani kelib chiqadi. ДЛ/Д/Д dan—— = cosa

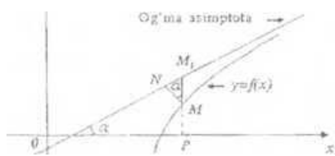
yoki bundan M_1M =—^~ hosil bo'ladi. a $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$ o'zgarmasligini hisobgaolsak
cos a

lim M_XM = —-— lim MN = 0 bo'ladi. cosa*-***

—

t-

131- chizma



Shu sababli

y

M iM = Ya^nou, - = {$kx + b$)~ ,$t\x$) va

4 **Vertical asimptota**

lim $M.M$ = lim (Ax + b - f(.v)) = 0 . (27.5)

Bundan lim x^A i- - - - j = 0.

«-Л = .x*

Ma'lumki ikki ifodaning ko/paytmasi nolga teng bo'lishi uchun kamida ulardan biri nolga teng bo'lishi lozim. Shuning uchun oxirgi tenglikda x-»+«>, shu sababli !+ ~~~ 0 bo'ladi.

132- chizma

lim—= 0 ekanini hisobga olsak lim; A:-^—= 0 yoki bundan
— A- X)

k = hmL^ (27.6)
v->» Y

hosil bo’ladi. (27.5) tenglikdan *b* - lim(/(x)-Ax) (27.7) ga ega bo’lamiz. Bunga *κ* ning topilgan qiymatini qo'ysak b topiladi.

Shunday qilib og’ma asimptotaning *κ, b* parametrlari mos ravishda (27.6) va (27.7) formulalar yordamida topilar ekan. (27.6) va (27.7) limitlar mavjud bo’lganda *y = kx + b* to’g’ri chiziq y = /(x) funksiyani og’ma asimptotasi bo’lishini ko’rsatish qiyin emas. Agar (27.6) va (27.7) limitlardan aqalli bittasi mavjud bo’lmasa, u holda *y- fix')* funksiyaning grafigi x ->+co da og’ma asimptotaga ega bo’lmaydi.

Funksiya grafigining x->-oo dagi og’ma asimptotasi ham shunga o’xshash topiladi. Umuman olganda funksiyaning grafigi x ->+<» da va x->-co da ikkita har xil og’ma aismptotalarga ega bo’lishi mumkin.

5- misol. *y* - —- funksiya grafigining asimptotalarini toping.

Yechish. lim^—= a>, bo’lganligi sababli x=-/ to’g’ri chiziq grafikning »-►-> x + 1 vertika) asimptotasidir. *v-kx + b* og’ma asimptotani izlaymiz.

* = = = lim ——id = |im—g - 1±2 - |
,r ™,(д.+1) ™|+l 1 + 0

$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right.$ $\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{x+1}$

I xj X

Demak, *y* - x-1 to’g’ri chiziq grafikning og’ma asimptotasidir.

6- misol. *y-e* ^v^ + x funksiya grafigining asimptotalarini toping.

Yechish. Vertikal asimptota mavjud emas, chunki funksiya butun son o’qida aniqJangan.

Og’ma asimptotalarni izlaymiz: l)*=l$_{im}$ZW=l.$_{m}$^-i=limp- + l)=l,

v_,a.z Y v.,t-Z Y '"«(Л)

b — lim (*/* (x) - *κ* • *x)* = lim (<? "+x-l-x) = lim —= 0.

Demak. y - x to’g’ri chiziq grafikning x dagi og’ma asimptotasidir.

2) *κ* - lim = lim f—— + 11 = lim —- + 1.

$-\infty$ da $\frac{e^{-x}}{x}$ $\frac{\infty}{\infty}$ nisbat — ko’rinishdagi aniqmaslik. Unga Lopital qoidasini

qo’llasak $k = \lim_{x\to-\infty} \frac{(e^{-x})'}{x'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{1}$ + j _ и$_т$ +1 = oo bo’ladi. Demak, л- -> -oo da grafik og’ma

asimptotaga ega emas Asimptoiaou.s ta'rifidan chegaralangan egri chiziqlar asimptotalarga ega ’lmasli'd kelib chiqadifmasalan, aylana, ellips va hokazo). Chegaralanmagan egri [b]h"alar [S]orasida asimptotaga ega bo’lganlari ham bo’lmaganiari ham mavjud. Masalan giperbolaning ikkita og’ma asimptotalarga ega ekanligi ma‘lum. Parabola esa asimptotaga ega emas.

Funksiyani to’la tekshirish deyilganda quyidagilar nazarda tutiladi.

27.3. Funksiyani to’la tekshirish va grafigini chizish

1. Funksiyaning aniqlanish sohasini topish.
2. Funksiyaning uzluksizlik intervallari, uzilish nuqtalari hamda bu nuqtalardagi bir tomonlama limitlarni topish.
3. Funksiyaning o’sish va kamayish intervallarini topish.
4. Funksiyaning ekstremumlarini topish.
5. Grafikning qavariqlik, botiqlik intervallari hamda egilish nuqtasini topish.
6. Grafikning asimptotalarini topish.

Yuqoridagi bandlarga to’liq javob olingandan so’ng ularga asoslanib funksiyaning grafigi chiziladi.

1- **eslatma.** Graflkni yasashda uning koordinata o’qlari bi Ian kesishish nuqtalarini topish foydalidir.

2- **eslatma.** Graflkni yasash oldidan funksiyaning juft yoki toqligini aniqlash foydalidir.

7-misol. *y = e~"* funksiyaning grafigi chizilsin.

Yechish. 1. Funksiya (-oo; +») intervaida aniqlangan.

2. Funksiya butun son o’qida uzluksiz.

J; y' = (e") = e" ' (- *’) -2-v e v’ .

e ' >0 bo’lganligi sababli .r<0 da /> o va л>0 da y'<0 bo’ladi. Demak funksiya (-co; o) intervaida o’sadi, (0;+«>) intervaida esa kamayadi.

4. Funksiyaning hosilasini nolga tenglashtirib, hosil bo’lgan tenglamani yechib unksiyaning kritik nuqtalarini aniqlaymiz: r’ 2.v *e* ’’ -0.

Demak, x = 0 kritik nuqta.

Bu kritik nuqtaning chapidan o’ngiga o’tganda hosila ishorasini plyusdan mmusga o’zgartirganligi uchun A-I) nuqtada funksiya maksimumga ega.

5. Ikkinchi hosilani topamiz:

У =(-2.ve-' j = _2e-$^{v'}$ -2A-e$^{’x}$ (-A^2) = -2e$^{'v}$ + 4л^2 *e* = 2(2x^2 - 1)e’".

Bum nolga tenglashtirib yechsak grafikning egilish nuqtalarining abssissalari hosil bo’ladi.

$e^{-x^2} \neq 0$ bo'lganligi uchun $2(2x^2 - 1)e^{-x^2} = 0$ л-² = -,x = +-2= tenglamadan 2x -1 = 0,

ga esa bo'lamiz. Demak grafikning x. = va x abssissali

2 72 o 51

va \V2 *yej* nuqtalari uning egilish nuqtalaridir. va

i oraliqlarda v“> 0 bo'lgani uchun grafik bu oraliqlarda botiq, _L]
) ' I V2'V2j

oraliqda y"<0 bo'lgani uchun bu oraliqda grafik qavariq.

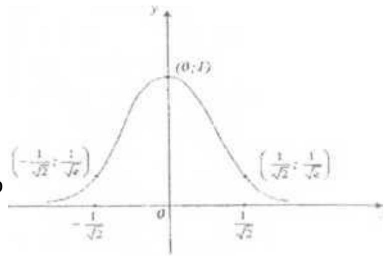
6. Funksiya *x* ning barcha qiymatlarida aniqlanganligi uchun uning grafigj vertikal asimptotalarga ega emas. Grafikning og'ma asimptotalarini aniqlaymiz.

к - lim — = lim -— = lim —Ц = 0,
Л•_>КД• x ^*Xe*^*x*'

b = lim(y - *к* ■ x) = lim(e ^v^ - 0 • x)= lim -U - 0.
x—>x- x-»»' ' *g*^x^'

Demak, y = 0, ya'ni Ox o'q grafikning asimptotasidir.

y = e~' funksiyaning grafigi **Gauss egri chizig'i** deb ataladi. U 133-chizmada tasvirlangan.



133- chizma

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

Quyidagi egri chiziqlarning egilish nuqtalari hamda botiqlik va qavariqlik intervallari aniqlansin.

1. y-x⁷. Javob: (-co;0) intervaida grafik qavariq, (0;+co) intervaida grafik botiq, (0; o) grafikning egilish nuqtasi.

2. y = 4-x². Javob: (-co; + co) intervaida grafik qavariq.

3. *y* = x^J -3x² -9x+9. Javob: (-co; 1) intervaida grafik qavariq, (1; +oo) intervaida grafik botiq, (1; -2) grafikning egilish nuqtasi.

4. y = x'. Javob: Grafik hamma yerda botiq.

5. *y-tgx*. Javob: (ля; 0) grafikning egilish nuqtalari.

Quyidagi egri chiziqlarning asimptotalari topilsin.

6. y - -—.Javob: x-2, y-0. 7. y--c^v^ I. Javob: x-0, y-0.
x- 2

8. v- !nx. Javob: x = 0. **9.** y'= 6x² rx'. Javob: y=x+2.

10. v = c + -—-—-. Javob: *x = b. v = c.*
(*-*)'

Quyidagi funksiyalarning grafiklari chizilsin.

11. y = x⁴ - 2x +10. 12. y = 2 + —J——.13. v = x + ——— .
x ' - 4 x + 2

14. y = x-fn(x + l). 15. y = —~.
' 11,-²

I б£ ~(1 + x2Xv funksiya grafigining botiqlik, qavariqlik oraliqlari hamda egilish nuqtalari

t0P*’sın / 10^ (2^1
egilish nuqtalari.

A) (-3J) da qavariq, (-»;-3)u(-l;+«)da botiq, gg J
B> (-31) da botiq, (-»;-зМ~ l;+«)da qavariq, ; -3;'Jj, [-1?) egilish nuqtalari,

D) Coo-3) da botiq, (-3;+«>)da qavariq, (- 3; 0.5) egilish nuqtasi.

E) (_oo;l) da botiq, (l;+«>)da qavariq, (1; 0,74) egilish nuqtasi.

F) (-oo;+oo) da grafik qavariq, egilish nuqta yo’q.

17 *(a;b)* intervalda uzluksiz ikkinchi tartibli hosilaga ega y = y(,v) funksiya uchun quyidagi mulohazalardan qaysi biri bajarilmasligi mumkin.

д) (0j>)da /’(x)>0 bo’lsashu intervalda >• = /(x) funksiyaning grafigi botiq.
B) (<r6)da /'(x)<0 bo’lsashu intervalda *y = f(x)* funksiyaninggrafigi qavariq.
Pj x = Xo (x(1e(a;Z>)) nuqtadan o’tganda/’(.r) ishorasini o’zgartsa grafikning (xj;/(x(,)) nuqtasi uning egilish nuqtasi bo’ladi.

E) /'(•ro)= 0 bo’lsa (x0;/(xy)) nuqtasi grafikning egilish nuqtasi.

F) *y = f(x)* funksiya («;/?) intervalda uzluksiz.

18. *y = x-2arctgx* funksiya grafigining asimptotalari topilsin.

X)y~-yy--.y = x~- **B) v = x +** *2я\ y* **= x - 2/т D)** *y = x + я, y = x-я*

E) v = л +1; *y - x*-- 1 F) asimptota mavjud emas.

19. y = xл-6x2+8x + 2 funksiya grafigining botiqlik, qavariqlik oraliqlari hamda egilish nuqtasini topilsin.

A) (-<ю;-2); (-2;+oo), (-2;-4б) B) (l;+w),(-«>;!); (2;2)

D) (-co;-]); (_i;+oo), (-1;-14) E) (3;+oo); (~<»;3); (3;-1)

F) (-3;+co); (-oo;-3); (-3;-103).

20. Noto’g’ri javobni ko’rsating.

A) ljm/(.v) = co bo’lsa x = a to’g’ri chiziq *y* = /(x) egri chiziqning asiniptotasi bo’ladi.

J,1'1)"7 mavjud bo’lmasa v = /(x) egri chiziq gorizontal asimptotaga ega emas.

D) Hm/(x) *oo bo’lganda y = /(x) egri chiziqx = avertikal asimptotaga ega bo’lmaydi.

E) hm[/(x)-b] mavjud bo Imaganda *y = j\x)* egri chiziq gorizontal asimptotaga ega emas.

.) Barcha chegaralanmagan egri chiziqlar kamida bitta asimptotaga ega.

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

I - Egri chiziqffunksiyaning grafigi) qay vaqtda qavariq deyiladi?
2. Egri chiziq qay vaqtda botiq deyiladi?
3. Funksiya grafigining egilish nuqtasi nima?
4. Grafikning qavariqlik oralig’i qanday topiladi?

2 3

/1(3; 0; 4) va B(-l; -2; 3) nuqtalardan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasi

$\frac{z-4}{1}$

chiziq bilan 2.v+y-z + 4 =

(f> = 24'5'.

$\frac{-Y\sim3}{} \_ \frac{У-2}{} = \frac{г4-1}{}$ tQ,g’ rJ chiziqqa 1 -3 4

pcipeiidikulyar tekislik lengldinasi topiisin. Javob: x ~3y< 4г+9-°- .

Ko’rsatma. Nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi yozilib to g rl tekislikning perpendikulyarlik shartidan foydalanilsin.

12. A (I;-1; 2) nuqtadan 3,v i 5z - <8 = 0 tekislikka perpendikulyar . to’g’ri chiziq tenglamasi topilsin. Javob: A--2 = 2_L1 =--y.

13.—• = - —- = ——— to’g’ri chiziq bilan x+y-z+5=0 tekislik0* j

2-11 nuqtasi topilsin. Javob: To’g’ri chiziq tekislikka parallel.

(/S3 « 3 • I + —______1 h________ 7 ____________ ; _____ +

I 162 162108 162108-486 162•108•486•59

I

osil bo’ladi